

关于 X 射线脉冲星自主导航的 位置观测方程*

姚国政[†] 费保俊 肖 昱

(装甲兵工程学院基础部 北京 100072)

摘要 在 X 射线脉冲星自主导航 (XNAV) 中, 位置观测方程表达了 X 光子到达航天器的时刻 (TOA) 和航天器位置的关系. 具体讨论时, 一般用 TOA 和“时间基准”的差值代替 TOA, 用太阳系质心系中的位置矢量表示航天器的位置. “时间基准”可以取 X 光子到达太阳系质心 (SSB) 的真实时间, 也可以取 X 光子到达 SSB 的“等效时间”. 讨论了基于这两种时间基准的位置观测方程, 给出了时间精度为 0.1 ns 的位置观测方程, 分析了其中各项的物理意义.

关键词 天体力学, 参考系, 时间, 方法: 解析

中图分类号: P 127; **文献标识码:** A

1 引言

X 射线脉冲星自主导航 (XNAV) 的基本测量方程是光子到达航天器的时间转换. 在太阳系质心系 (BCRS) 中, 设光子从脉冲星 (P) 发出和到达航天器 (A) 两个事件的时空坐标分别为 (t_P, \vec{r}_P) 和 (t_A, \vec{r}_A) , 则二者的时间差值可简记作

$$c(t_A - t_P) = |\vec{r}_P - \vec{r}_A| + f(\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{r}_S \cdots), \quad (1)$$

其中的函数 $f(\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{r}_S, \cdots)$ 取决于航天器和脉冲星在 BCRS 中的位置矢量 \vec{r}_A, \vec{r}_P 以及引力源的矢径 $\vec{r}_S \cdots$ 等因素, 下面我们将给出具体表达式. 显然, 由于无法知道光子从脉冲星发出时的时间 t_P , 不能直接从上式求得光子到达时间 (TOA) t_A . 为解决这一问题, 有两种处理方法:

一种是 Sheikh 等^[1-3] 首先提出来的差分方法, 选取太阳系质心 (SSB, 简记 B) 为参考点, 求出光子到达 SSB 的时间 $t_{SSB} \equiv t_B$

$$c(t_B - t_P) = |\vec{r}_P| + f(0, \vec{r}_P, \vec{r}_S \cdots). \quad (2)$$

将 (1) 式和 (2) 式相减可消去 t_P , 通过比较光子到达航天器和 SSB 的时间差 $t_A - t_B$, 即可确定航天器相对于 SSB 的空间位置. 这是现在通用的方法, 得到国内一些学者的认同^[4-5].

2011-09-13 收到原稿, 2011-12-06 收到修改稿

* 装甲兵工程学院创新基金项目 (2011CJ001) 资助

[†] yaoguozheng@163.com

然而,我国天文学界两位前辈对此提出质疑^[6],认为 Sheikh 的方法对 XNAV 具有颠覆性影响. 文章指出上述 t_B 是指光子实际到达 SSB 的时间,我们不可能在 SSB 放置探测器接收光子,因此它也是无法知道的,应该采用光子到达 SSB 的一种等效时间 $d_{SSB} \equiv d_B$ 替代之. 这个等效时间相当于在真空平直时空中光子从脉冲星到达 SSB 的时间(下面将说明它的确切物理意义),满足

$$c(d_B - t_{P0}) = D + g(0, \vec{r}_{P0} - \vec{r}_{S0}, \cdots), \quad (3)$$

式中, $D = r_{P0}$ 是参考时刻 $t = t_{P0} \neq t_P$ 脉冲星的距离,函数 g 基本上可以看成常数. 将 (1) 式和 (3) 式相减得到时间差 $(t_A - d_B)$, 同样可以为航天器定位. 这种方法也在有关脉冲星计时等文献中采用^[7-9].

上面两种方法的区别是时间基准不同,从原理上讲都是可行的. 但是正如文献 [6] 所述,由于在实际应用中,时间基准的确定涉及到许多工程问题,取 t_B 还是 d_B 对 XNAV 的影响是很大的. 有意思的是,我们在文献 [10-11] 中讨论了第 2 种方法的高精度情况,又在文献 [12] 中修正了第一种方法,并在文献 [13] 中对这两种方法的异同作了简要说明,认为这两种方法没有本质上的区别,只是表述形式不同. 但是,在 XNAV 研究领域仍然存在这样的疑问:如何证明这两种方法在物理本质上是一致的? 从实用的角度讲,在工程上,哪种方法更方便? 本文从光子传播的时间方程出发,结合定位的需要,对这些疑问进行更详细地讨论,并对位置观测方程中各项的物理含义进行分析和说明.

2 以光子到达 SSB 的时间为基准的观测方程

用符号 A, P, S, E, J 等分别表示观测航天器、脉冲星、太阳、地球和木星等天体,以 SSB 为参考点建立太阳系质心系 (BCRS), 规定:

$\vec{r}_X (X=A, P, S, E, J, \cdots)$ 是 X 在 BCRS 中的位置矢量:

$$\vec{r}_{XY} = \vec{r}_Y - \vec{r}_X,$$

$$r_{XY} = |\vec{r}_Y - \vec{r}_X| \quad (X = A, P, S, \cdots \quad Y = A, P, S, \cdots)$$

是从 X 指向 Y 的矢量及其大小; \vec{n}_X 是脉冲星相对于 X ($X = A, P, S, \cdots$) 的单位矢量, \vec{n} 是参考时刻脉冲星相对于 SSB 的单位矢量,如图 1 所示.

我们在 BCRS 坐标系中讨论光子的运动方程. 根据国际天文学会的建议,引力场度规采用 DSX 体系的度规(时间部分是 2PN, 空间部分是 1PN). 由度规求出光子的轨迹方程,沿光子的轨迹方程积分可以求出光子的传播时间. 设光子从脉冲星发出和航天器接收到光子的事件分别为 (t_P, \vec{r}_P) 和 (t_A, \vec{r}_A) , 如果时间测量精度在 ns 量级,则两事件的时间差值为

$$c(t_A - t_P) = r_{AP} + \sum_{K=S, E, \cdots} R_{gK} \ln \left(\frac{r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}}{r_{KA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KA}} \right) + w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP}), \quad (4)$$

$$w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP}) = \frac{R_g^2}{R_{SA}} (\phi(\vec{n}, \vec{r}_{SA}) - \phi(\vec{n}, \vec{r}_{SP})), \quad (5)$$

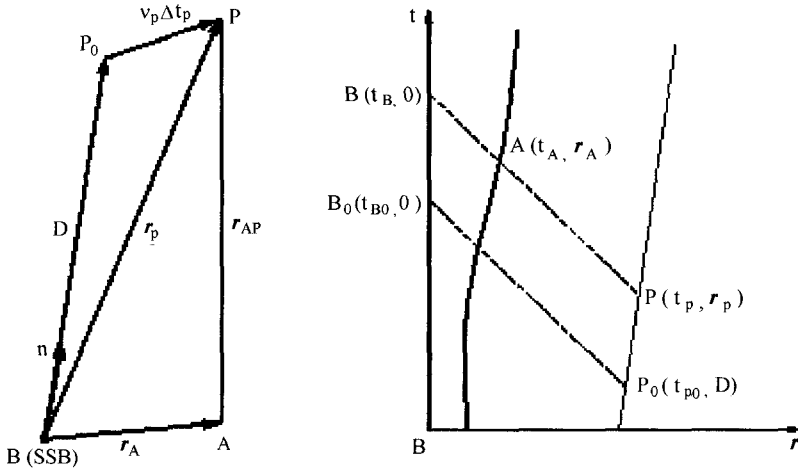


图 1 航天器和 SSB 接收光子的空间示意图 (左图) 和时空图 (右图)

Fig.1 Illustration of receiving photons at spacecraft and SSB:

space diagram(left) and space-time diagram(right)

式中, $R_{gK} = 2GM_K/c^2$ 是星体 K ($K = S, E, J, \dots$) 的引力半径;

$R_g = R_{gS} = 2GM_S/c^2 = 2.953 \times 10^3$ m 是太阳的引力半径;

$\phi(\vec{n}, \vec{r}_x) = \cos^{-1}(\vec{n} \cdot \hat{r}_x)$ 是脉冲星方向矢量 \vec{n} 与 \vec{r}_x 所夹的角度, \hat{r}_x 表示 \vec{r}_x 的方向矢量.

R_s 为脉冲星与航天器连线到日心的距离, 近似为 $R_{SA} = \sqrt{r_{SA}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_{SA})^2}$.

(4) 式右边的后两部分就是 (1) 式中的函数 $f(\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{r}_S \dots)$, 是广义相对论效应产生的, 高阶小量 $w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP})$ 是具有长度量纲的函数, 顺便说明, 我们在文献 [12] 中对该函数的书写有错, 这里加以改正.

设位于 \vec{r}_P 处的脉冲星在 t_P 时刻发出光子, 到达 SSB 的时间为 t_B . 替换 (4) 式中的下标 $A \rightarrow B$, 且有 $\vec{r}_B = 0$, $\vec{r}_{KB} = \vec{r}_B - \vec{r}_K = -\vec{r}_K$, ($K = P, S, \dots$), 就得到光子从脉冲星到达 SSB 的时间

$$c(t_B - t_P) = r_P + \sum_K R_{gK} \ln \left(\frac{r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}}{r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K} \right) - w(-\vec{r}_S, \vec{r}_{SP}). \quad (6)$$

又设 \vec{V} 是脉冲星在 BCRS 中的速度, $\vec{D} = D\vec{n}$ 是脉冲星在参考时刻 t_{P0} 的位矢, $\Delta t_P = t_P - t_{P0}$ 是脉冲星从 \vec{D} 运动到 \vec{r}_P 的时间, 由图 1 中左图可知

$$\begin{cases} \vec{r}_P = D\vec{n} + \vec{V}\Delta t_P \\ r_P = D + \vec{n} \cdot \vec{V}\Delta t_P + \frac{V^2 - (\vec{n} \cdot \vec{V})^2}{2D} \Delta t_P^2 + O(D^{-2}) \\ r_{AP} = r_P - \vec{n} \cdot \vec{r}_A + \frac{r_A^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)^2}{2D} \\ \quad - \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{V} - (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)(\vec{n} \cdot \vec{V})}{D} \Delta t_P + O(D^{-2}) \end{cases}, \quad (7)$$

将 (4) 式与 (6) 式相减并利用 (7) 式, 得到光子到达航天器和 SSB 的时间差:

$$\begin{aligned} c(t_A - t_B) = & -\vec{n} \cdot \vec{r}_A + \frac{1}{2D} [r_A^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)^2 - 2(\vec{r}_A \cdot \vec{V} - \\ & (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)(\vec{n} \cdot \vec{V})) \Delta t_P] - \sum_K R_{gK} \ln \left(\frac{r_{KA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KA}}{r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K} \right) + \\ & w(-\vec{r}_S, \vec{r}_{SP}) - w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP}). \end{aligned} \quad (8)$$

以上方法是 Sheikh 等^[1-3] 首先提出来的, 我们在文献 [12] 中对他们导出的公式修正成 (8) 式, 并引入了一种等效时间 h_B , 这是因为因子 $w(-\vec{r}_S, \vec{r}_{SP})$ 与观测者无关, 仅取决于日心和脉冲星的矢矢:

$$\begin{aligned} ch_B &= ct_B + w(-\vec{r}_S, \vec{r}_{SP}) \\ &= ct_P + r_P + \sum_K R_{gK} \ln \left(\frac{r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}}{r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

上式第 2 步用到 (6) 式, 由此可以看出时间 h_B 实际上是不考虑光线弯曲情况下光子到达 SSB 的时间. 仔细分析 (8) 式就发现, 方程右边的因子 $\sum R_{gK} \ln(r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K)$ 也与观测者无关, 如果将其也并入到等效时间中, 则等效时间中也不出现该因子, 成为

$$\begin{aligned} \tilde{ch}_B &= ct_B + w(-\vec{r}_S, \vec{r}_{SP}) + \sum_K R_{gK} (r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K) \\ &= ct_P + r_P + \sum_K R_{gK} \ln(r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}), \end{aligned} \quad (10)$$

下面我们将证明上式与文献 [6] 的结论相同.

3 以光子到达 SSB 的“等效时间”为基准的观测方程

文献 [6] 是以 (4) 式为基础展开的, 将 (7) 式代入该式就得到

$$\begin{aligned} c(t_A - d_B) = & -\vec{n} \cdot \vec{r}_A + \vec{n} \cdot \vec{V} \Delta t_P + \\ & \frac{1}{2D} [r_A^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)^2 - 2(\vec{r}_A \cdot \vec{V} - \\ & (\vec{n} \cdot \vec{r}_A)(\vec{n} \cdot \vec{V})) \Delta t_P + (V^2 - (\vec{n} \cdot \vec{V})^2) \Delta t_P^2] - \\ & \sum_K R_{gK} \ln(r_{KA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KA}) - w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP}), \end{aligned} \quad (11)$$

式中定义的 d_B 就是文献 [7] 中引入的所谓“质心瞬间”:

$$cd_B = ct_P + D + \sum_K R_{gK} \ln(r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}). \quad (12)$$

它的物理意义不是很明确, 因为常数 D 是参考时刻脉冲星的距离, 也就是参考时刻假想在真空平直时空中, 光子从脉冲星到达 SSB 的时间与光速的乘积, 而求和项中的 $\vec{r}_{KP} = \vec{r}_P - \vec{r}_K$ 是当前时刻脉冲星相对于引力源 K 的矢径, 当 Δt_P 不能忽略时必须考虑 \vec{r}_{KP} 的变化. 因此严格地讲, 只有当 Δt_P 很小时可以将 d_B 理解为 t_P 加上一个大常数.

文献 [6] 进一步提出, (11) 式右边与脉冲星自行有关的项与观测者无关, 反映的是脉冲星的固有特性, 可将其并入到 d_B 中, 这样 (12) 式就变成

$$\begin{aligned} cd_{\tilde{B}} &= cd_B + \vec{n} \cdot \vec{V} \Delta t_P + \frac{1}{2D} \left(V^2 - (\vec{n} \cdot \vec{V})^2 \right) \Delta t_P^2 \\ &= ct_P + r_P + \sum_K R_{gK} \ln(r_{KP} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KP}). \end{aligned} \quad (13)$$

它的物理意义也很明确, 是不考虑光线弯曲情况下光子到达 SSB 的时间加上一个常数 $\sum R_{gK} \ln(r_K - \vec{n} \cdot \vec{r}_K)$, 可以粗略理解为 SSB 附近的一个固定空间点接收光子的时间。

显然, 上式与 (10) 式相同。但是需要说明, 如果考虑星际介质产生的色散延缓 (它正比于色散量 $D(l)$, 姑且认为光子到达 SSB 和航天器的色散量相同, 即 $D(r_P) = D(r_{AP})$), 用第 2 节的方法, 这一部分被减掉了, 因而在 \tilde{h}_B 中不出现色散延缓项, 但用本节的方法则要将这一部分归入到 \tilde{d}_B 中。在此情况下 \tilde{d}_B 与 \tilde{h}_B 有差异。

4 结论和讨论

记 $\tilde{d}_B = \tilde{h}_B = \tilde{t}_B$, $\vec{r}_A = \vec{r}$, 则式 (8) 和式 (11) 都变成

$$\tilde{t}_B - t_A = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} + \delta t_a + \delta t_v + \delta t_{g1} + \delta t_{g2}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \delta t_a = -\frac{1}{2cD} (r^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r})^2) = -\frac{1}{2cD} |\vec{n} \times \vec{r}|^2, \\ \delta t_v = \frac{1}{cD} \left(\vec{r} \cdot \vec{V} - (\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{V}) \right) \Delta t_P, \\ \delta t_{g1} = \frac{1}{c} \sum_K R_{gK} \ln(r_{KA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{KA}) \approx \frac{R_g}{c} \ln(r + \vec{n} \cdot \vec{r}), \\ \delta t_{g2} = \frac{w(\vec{r}_{SA}, \vec{r}_{SP})}{c} \approx \frac{R_g^2}{c} \frac{\cos^{-1}(\vec{n} \cdot \hat{r})}{\sqrt{r^2 - (\vec{n} \cdot \vec{r})^2}}. \end{cases} \quad (15)$$

由于没有考虑太阳等引力源的多极矩和矢量势, 上式在计时精度为 10^{-10} s 之内是严格的。此式的优点在于方程右边仅与观测者的位矢以及脉冲星方向矢量有关, 仅与脉冲星的性质有关的部分都反映在计时基准之中。这就是文献 [6] 所提方法的优点。显然, 从实用的角度出发, 在工程上, 文献 [6] 的方法更方便。

下面对 (15) 式中各项的物理意义加以分析和说明。在讨论中取航天器和脉冲星数据的数量级分别为 $r \sim 10^{11}$ m, $D \sim 10^{19}$ m, $V_r \sim 10^5$ m/s。

(1) 脉冲星视差修正项 δt_a

它是对脉冲星周年视差的修正, 与航天器的横向位置 $|\vec{n} \times \vec{r}|$ 有关, 其量级为 10^{-5} s。

(2) 脉冲星自行修正项 δt_v

它是由于脉冲星在 BCRS 中的固有运动 (自行) 产生的, 取决于脉冲星的切向运动速度。但还有一个因素是 $\Delta t_P = t_P - t_{P0}$, 它是脉冲星从参考时刻开始发射 N 个脉冲的时间间隔, 与 SSB 接收 N 个脉冲的时间间隔 $\Delta t_B = t_B - t_{B0}$ 是不同的, 这可以从图 1 右图中明显看出, 二者的关系可由 (6) 式算出:

$$\Delta t_B - \Delta t_P = \frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} \Delta t_P + \frac{V^2 - (\vec{n} \cdot \vec{V})^2}{2cD} \Delta t_P^2 + \dots,$$

右边的两项即为 $(r_P - D)/c$, 省略的高阶小量对应于相对论效应的有关项. 上式表明二者的相对误差约为 10^{-3} , 但考虑到 δt_V 本来就是小量, 用 Δt_B 代替 Δt_P 产生的误差可以忽略不计. 该项的数量级约为 $\delta t_V \sim 10^{-11} \Delta t_B$, 当 Δt_B 不是很大时可以忽略.

(3) 引力延缓修正项 δt_{g1}

由于引力场中光子的坐标速度小于真空中光速, 由此产生的时间延缓称作 Shapiro 效应. 实际上它是根据引力场的 1PN 度规并将光子轨迹取为直线导出来的, 严格地讲应称作 1 阶相对论效应修正项. 取引力源为太阳 (S)、地球 (E) 和木星 (J), 该项为

$$\frac{1}{c} [R_g \ln(r_{SA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{SA}) + R_{gE} \ln(r_{EA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{EA}) + R_{gJ} \ln(r_{JA} + \vec{n} \cdot \vec{r}_{JA})],$$

根据 3 颗天体的引力半径 (2.95×10^3 、 8.87×10^{-3} 、 2.82 m), 可知上面 3 项的数量级分别为 10^{-5} 、 10^{-10} 、 10^{-8} s.

(4) 光线弯曲修正项 δt_{g2}

该项是由于太阳引力场中光子轨迹的弯曲以及 2PN 度规中太阳质量平方项的贡献, 可称作 2 阶相对论效应修正项或光线弯曲修正项, 其量级不大于 10^{-10} s.

参 考 文 献

- [1] Sheikh S I. The use of variable celestial X-ray sources for spacecraft navigation. Ph.D. Dissertation. University of Maryland, 2005
- [2] Sheikh S I, Control and Dynamics, 2006, 29: 49
- [3] Graven P H, Collins J T, Sheikh S I, et al. Spacecraft Navigation Using X-ray Pulsars. 7th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, 2008
- [4] 杨廷高, 南仁东, 金乘进, 等. 天文学进展, 2007, 3: 249
- [5] 李建勋, 柯熙政. 中国科学: 物理学力学天文学, 2009, 39: 311-317
- [6] 赵铭, 黄天衣. 中国科学: 物理学力学天文学, 2009, 39: 1671
- [7] Murray C A. Vectorial Astrometry. Techno House: Adam Hilger Ltd, 1983
- [8] Helling R W. Astronomical Journal, 1986, 91: 650
- [9] Backer D C, Helling R W. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1986, 24: 537
- [10] 孙维瑾, 费保俊, 肖昱, 等. 天文学报, 2008, 49: 198
- [11] Sun W J, Fei B J, Xian Y, et al. ChA&A, 2008, 32: 400
- [12] 费保俊, 孙维瑾, 潘高田, 等. 空间科学学报, 2010, 30: 85
- [13] 费保俊, 姚国政, 杜健, 等. 中国科学: 物理学力学天文学, 2010, 40: 644

On the Position Measurement Equation of XNAV

YAO Guo-zheng FEI Bao-jun XIAO Yu

(Department of Foundation, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072)

ABSTRACT The position measurement equation of XNAV (X-ray pulsar-based autonomous navigation) reveals the relation between the TOA and receiving position of X-ray signal. For navigation, TOA is often rewritten in the form of difference between TOA and some preset “time reference”. The “time reference” may be the true TOA at SSB, or some “equivalent TOA” at SSB. Because the true TOA at SSB is difficult to obtain, the “equivalent TOA” is more convenient for navigation. From the expression of “true TOA”, the expression of the “equivalent TOA” is derived, and the physical origin of each item is analyzed. The “equivalent TOA” consists of those items irrelevant to the craft, but relevant to the background. Then in the new measurement equation, the time difference concentrates on the items directly relevant to the position of the craft. The new equations has the time accuracy of 0.1 ns.

Key words celestial mechanics, reference systems, time, methods: analytical