

攝影極限星等

王為豪

ver.2.0 Feb.2005

回顧

在目前仍找得到的業餘天文書籍中，關於攝影極限星等最完整的討論可在“A Manual of Advanced Celestial Photography”一書中找到。該書中的討論，若濃縮到最簡，可以此公式為代表：

$$m_l = s_{sky} + 5 \log f - 2.5 \log d - 15.58 \quad (1)$$

此為該書中的(4.13)式，但單位被我修正為標準的公制單位。其中， m_l 是攝影極限星等， s_{sky} 是每平方角秒天空背景光的星等， f 是望遠鏡焦距， d 是底片上最小（也就是最暗）的星像直徑（註一）， d 與 f 的單位都是公尺。

同樣的公式也出現在日本的“增補 天體寫真テクニック”平林茂人的文章中，我相信這本書中的公式與 A Manual 一書中的公式有同樣出處。根據 A Manual 一書，該式是由 F. L. Whipple 於 1942 年導出，這是該書對本公式出處唯一的敘述，該式如何被導出或如何從實驗中歸納而得，我們無從得知，其它的業餘文獻也未記載。

本文將從最基本的原理出發，探討並計算影響攝影極限星等的因素，終極目標便是以我們已具有的簡單知識，徹底攻破(1)式。

業餘天文攝影的極限星等（狀況一）

此處之所以強調“業餘”，因為我們將先探討沒有濃度儀或任何專業測定儀器的情況，我們唯一用來鑑定底片或照片的儀器的就是肉眼。

影響攝影極限星等最重要也最根本的因素就是天空背景光。天空背景光可以來自城市或任何人為的光害、曙暮光、極光、黃道光、月光、及大氣本身的發光現象（此稱天光，airglow）。其中，尤以最後者永遠甩不掉，在地球上任何角落，都會有天光。我們在朝向天空拍攝時（透過望遠鏡或相機鏡頭），底片永遠會看到並非全黑的天空，在做極長時間的曝光時，我們所能拍到最暗的星像，便受限於天空本身的亮度。不意外地，比天空還暗的星點便會被天空本身的亮度淹沒，不論曝光多久都無法在底片上顯現出來。

比天空暗多少的星點會被天空淹沒？這不是個容易回答的問題。如果我們能做幾項還算合理的假設，我們或許可以回答它。假設我們的曝光時間夠長，天空在底片上的濃度已遠高於底片的片基加灰霧濃度，此時底片上任何區域都應有足夠多且均勻的銀粒子沉澱。再假設我們的星點與銀粒子相較並不會太小，也就是星點面積內有數量足夠的銀粒子，以供我們用肉眼辨別在此區域內，銀粒子濃度比週圍的天空略高。

基於我們對攝影的一般了解，我們知道，底片上相鄰兩塊濃度不等的區域，在正常顯影的狀況下，如果曝光量相差超過 $1/3$ 格，也就是 $2^{1/3}=1.26$ 倍，那麼這兩區在底片上的濃度差將足供肉眼察覺。這表示，如果某星經望遠鏡成像後的表面亮度是天空的 0.26 倍，其造成的總曝光量（星點本身加天空）將會是天空的 1.26 倍，足供我們辨認其存在。所以，在以肉眼辨認底片上的星像時，極限星等便是表面亮度為天空的 0.26 倍的星像。

現在我們要將 0.26 這數字換算成極限星等，這需要一點麻煩的數學。首先，若該最暗或最小星像在底片上的直徑是 d ，光學系統的焦距是 f （ d 與 f 取相同的單位），則該星像直徑所對應的角直徑便是 $\theta = d/f$ 弧度，以角秒為單位的話則是

$$\theta = 2 \times 10^5 \times d / f \quad (2)$$

此處我們以角秒為單位，以配合常用的天空背景亮度單位。如果我們能攝得最暗的星是 m_l 等，其星光散佈在 θ 角秒直徑的圓形區域內（面積為 $\pi\theta^2/4$ ），其表面亮度 s 便是（依據星等的定義）：

$$s = m_l + 2.5 \log(\pi\theta^2 / 4) \quad (3)$$

單位為星等每平方角秒。把(2)代入(3)再做些簡單的運算，我們得到

$$s = m_l + 5 \log d - 5 \log f + 26.24 \quad (4)$$

現在，我們要求星的表面亮度（ s ）是天空表面亮度（ s_{sky} ）的 0.26 倍，把 0.26 換算成星等的話，我們有

$$s = s_{sky} - 2.5 \log 0.26 = s_{sky} + 1.46 \quad (5)$$

聯立(4)與(5)，我們得到

$$m_l = s_{sky} + 5 \log f - 5 \log d - 24.78 \quad (6)$$

或者，聯立(3)與(5)，我們得到

$$m_l = s_{sky} - 5 \log \theta + 1.72 \quad (7)$$

式(6)與(7)是等價的，它們便是我們在這個階段需要的結果。

此處讓我對(7)式的意義做個簡短的說明，極限星等的意義在於考驗我們是否能在一片明亮的天空背景中，辨認出一顆暗星。(7)式告訴我們，若我們的攝影解析力越高，也就是 θ 越小，極限星等便越高。這非常合理也合乎直覺，天空在底片上單位面積的亮度不變，來自一暗星的星光總能量也不變，但若我們能將此星的能量聚焦在底片上越小的區域，我們便越有希望從一片明亮的背景中認出它來。

各位可能會發現，(6)式與(1)式並不一致，尤其是 $\log d$ 項前的係數讓人特別不舒服（後面的常數項倒不頂重要）。先別急，這是因為它們是不同條件下的產物，但並不表示(6)是錯誤的。我們可以舉個例子與數字代進去，看看結果合不合理。

在條件優良的觀星地點（以 Kitt Peak 等遠離城鎮的天文台為例），無月光、無極光、避開黃道、下半夜近天頂等條件下，天空背景光在綠色光的亮度約是每平方秒 21.5 等。在光害日益嚴重的台灣，山區的背景亮度約比此高 1 到 1.5 等。此處我們減 1 等以符合台灣的中度光害條件，因此 $s_{sky}=20.5$ 。如果我們使用的光學系統焦距為 530mm，底片上的最小星像直徑是 $30\mu\text{m}$ ($1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$)，則依據(6)式，我們算出極限星等約是 17 等。這數字與我在 90 年代初期在阿里山使用 ε -160 拍攝的結果相當吻合。

關於(6)與(7)式，我尚有一事需說明，在變出 0.26 這數字時，我假設底片將經正常顯影。但若我們增長顯影時間，也就是做所謂的 push，底片上的反差將增加，這將使得即使曝光量差在 1/3 格以下，最終的濃度差仍可被肉眼查覺。這相當於我們將 0.26 以更小的數字置換，也就是使我們有更高的極限星等。簡言之，在顯影時做 push 有助於提升極限星等。至於我們最高可以透過 push 增進多少極限星等，則視底片及顯影配方而不同。

在有濃度儀的專業條件下（狀況二）

前面我們認為，肉眼能在底片上辨認出最暗的星約是背景的 0.26 倍。這數字在有濃度儀輔助的狀況下，還可以更低，也就是，我們可以從底片上辨認出更暗的星像。

到底能辨認出多暗的星像，關鍵在一個最小星像直徑內，是否有足夠高的訊噪比以供我們判斷此訊號是出於真正的星點還是雜訊。根據統計學原理，我們用濃度儀掃描底片上某一範圍內的濃度然後求取平均濃度，掃描的範圍越大，求得的平均濃度便會越準確。如果我們可以對一星像內的平均濃度做很準確的量測，即使此平均濃度只比背景高出一點點，我們都有希望將它從背景中辨認出來。所以若要將極限星等推到比天空背景還低很多，那我們需要的便是一部濃度儀，以及在底片上相對於底片粒子來說越大越好的星像。在這樣的條件下，我們可以對攝影極限星等做很精確的估計，以下介紹其計算。

底片的噪訊比與 rms 粒狀性

底片的特性曲線形狀描述曝光量以及濃度間的關係，如果這條曲線為已知，我們可以透過量測天體在底片上的濃度，來反推曝光量，也就是天體的亮

度。但任何量測必然伴隨誤差，如果濃度量測的方均根誤差是 σ_D ，其所對應到曝光量（ E ）的對數的誤差是 $\sigma_{\log E}$ ，那麼，這二者間的關係將非常簡單：

$$\sigma_{\log E} = \sigma_D / \gamma \quad (8)$$

其中， γ 是特性曲線斜率。運用簡單的微分及誤差傳遞， $\sigma_{\log E}$ 中討厭的對數可以被拿掉，結果是

$$\sigma_{\log E} = \sigma_E / E \ln 10 = 0.434 \sigma_E / E \quad (9)$$

結合(8)與(9)，我們得到

$$\sigma_E / E = \sigma_D / 0.434 \gamma \quad (10)$$

(10)式中的 σ_E/E 就是我們要的噪訊比。

在(10)的噪訊比公式的右側， γ 是特性曲線斜率，是很容易取得的技術資訊，那麼 σ_D 呢？我們如何知道 σ_D 的值是多少？

σ_D 的數值可以使用濃度儀來量取，一種可能的做法就是，讓底片得到均勻的曝光，沖片後以濃度儀掃描此一均勻曝光區上一個狹窄的帶狀區域。理論上，既然底片受到的曝光是均勻的，濃度儀掃描出來的數值也該是一個不變的常數。但因為底片的顆粒是有大小的，有些底方的顆粒數量會多一點，有些地方少一點，濃度儀掃出來的濃度會有一微小的隨機變化，這個變化的方均根值就是 σ_D 。

幸運的是，我們不必真的拿濃度儀去掃底片，至少在做極限星等的事前評估時不必，這個掃描動作，底片的生產廠商已經幫我們做好了，其結果就是廠商公布的 rms 粒狀性（ g_{rms} ）。更詳細一點說，根據 ISO 定義的標準測量方法，底片 rms 粒狀性在測量時，面對平均濃度為 1.0（註二）的底片，濃度儀是掃描過一個 48 μ 寬的區域，其所量到的方均根濃度變化乘以 1000，才是底片的 rms 粒狀性。換句話說， $\sigma_D = g_{rms}/1000$ 。把這個結果套入(10)式，我們得到噪訊比

$$\sigma_E / E = g_{rms} / 434 \gamma \quad (11)$$

要注意的是，(11)式只對 48 μ 大的量測區域成立，我們在測量底片上的星點濃度時，濃度儀量測濃度的區域不見得會是 48 μ ，而是該星點的大小 d 。根據簡單的誤差傳遞原理，訊噪比正比於量測區域面積之根號，換句話說，正比於量測區域直徑。我們可以依此修正(11)式，結果是

$$\sigma_E / E = \frac{g_{rms}}{434 \gamma} \left(\frac{48 \mu}{d} \right) \quad (12)$$

攝影極限星等

我們可以仔細想想(12)式的意義， E 是底片上的背景曝光量，其實也就是正比於天空的表面亮度（ s_{sky} ）， σ_E 是我們在測量曝光量時因粒子雜訊而產生的誤

差。如果我們量到一個比 σ_E 強很多的訊號，那我們便有信心說此一訊號是來自一個真實的恆星，而非粒子雜訊。多強才是夠強？保守一點的話我們會要求訊號至少要是雜訊的五倍，也就是

$$s = 5\sigma_E = \frac{g_{rms}}{86.9\gamma} \left(\frac{48\mu}{d} \right) s_{sky} \quad (13)$$

換成星等並以公尺為 d 的單位的話就成了

$$\begin{aligned} s &= s_{sky} - 2.5 \log \left[\frac{g_{rms}}{86.9\gamma} \left(\frac{48\mu}{d} \right) \right] \\ &= s_{sky} - 2.5 \log(g_{rms} / \gamma) + 2.5 \log d + 15.64 \end{aligned} \quad (14)$$

聯立(4)與(14)式，我們很快就可以得到

$$m_l = s_{sky} - 2.5 \log d + 5 \log f - 2.5 \log(g_{rms} / \gamma) - 10.76 \quad (15)$$

這便是我們的追求的極限星等公式。各位會發現，(15)式與(1)式像多了，尤其是 $\log d$ 項前的係數，這完全是統計學所導致的結果。要注意的是，在(6)式中，我們並未限定 d 與 f 的單位，只要二者單位一致即可，但在(15)式中，我們已限定它們的單位都要是公尺。

我們馬上可以比對一下(15)與(1)式，看看能學到些什麼。如果我們讓特性曲線斜率為 1.0（中高反差），我們會發現(1)式代表著約 85 的 rms 粒狀性。這並不是非常讓人驚訝的結果，別忘了，(1)式是 40 年代的產物（70 與 80 年代的天文用乳劑如 103aF 等，rms 粒狀性都仍高達 30 或 40）。

至此我們已完全攻略(1)式，我們可以相信(15)式是正確且合理的。現在讓我以目前較具代表性的數據代入(15)中，使它成為適合現代底片的公式。對目前大部份的正片與高反差黑白負片來說，rms 粒狀性 8、反差指數 1.0 是合理的平均值，這樣的底片的極限星等是

$$m_l = s_{sky} - 2.5 \log d + 5 \log f - 13.26 \quad (16)$$

有趣的是，光是因為底片粒子變細了，我們的極限星等便比 1940 年代增加了超過 2 等，這是很了不起的（當然，1940 年代的天空卻比現在暗了至少一個星等）。而且，這只針對(16)與(1)式末尾的常數項而言，再考慮到 $\log d$ 項的話，現在的極限星等會更高，因為底片粒子越細，星像便會越小。

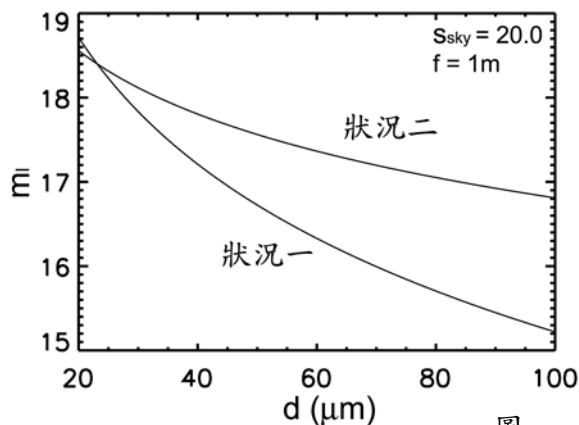
如果用的是 TP，其 rms 粒狀性在 10 左右，但這是以 4μ 為範圍做掃描，與正統 rms 粒狀性的 48μ 不同，因此我們要對(12)式做出修正。將這些都考慮進去後，我們得到 TP 的極限星等公式是

$$m_l = s_{sky} - 2.5 \log d + 5 \log f - 10.56 \quad (17)$$

要提醒大家的是，(16)與(17)式代表的都是以濃度儀做精確統計分析的狀況，一般我們對底片做目視判別的話，得到的極限星等都遠不及(16)或(17)的理論值，尤其是(17)式。

綜合討論

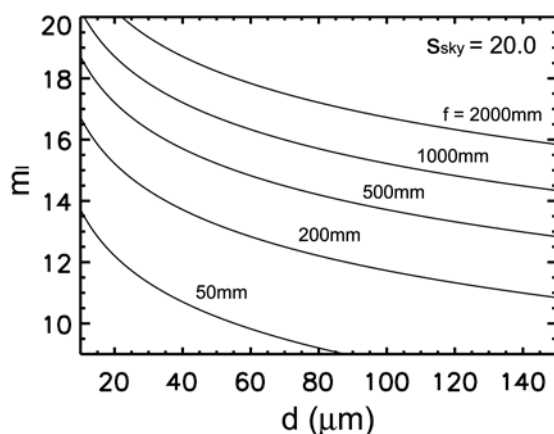
最後，我將簡單討論以上計算結果的意義。首先，我們可以比較一下第一與第二種狀況的不同。圖一是根據(6)式與(16)式畫出狀況一、二的極限星等，假設焦距 1m，天空背景亮度是每平方秒 20.0 等。我們可以看出，只要是星點直徑在 $25\mu\text{m}$ 以上（註三），狀況二的極限星等便比狀況一高，而且，星點直徑越大，二者差別越大。這一點也不令人意外，用濃度儀做精確測定，當然可以從底片上檢測出肉眼分辨不出的暗星，而且依照我們之前的論述，星點越大，濃度儀便可測量越大的範圍以作平均，其辨別暗星的能力也就越強。不過整體而言，星點越小極限星等越高這件事，不論對哪一種狀況都成立，這一點讀者應放在心上。



圖一

不論是(16)式還是(1)式，都是基於有濃度儀輔助的情況，這對大部份業餘攝星者來說並不實際，我建議攝星者在評估極限星等時，應使用(6)或(7)式，也就是以肉眼判定底片上的星像的狀況。以下僅針對(6)與(7)討論。

圖二是根據(6)式，針對不同焦距所畫的極限星等圖，幾個基本趨勢可以在圖中清楚看到。一是，對任何焦距來說，星點越大極限星等便越低，這仍與圖一樣。二是，焦距越長極限星等越高，這可能與我們一般的預期不盡相同。在一般印象中，越低焦比的高速系統越能有效拍到較暗的天體，這是正確的。不過，焦比只關係著你可以怎樣的速度達到極限星等（焦比越低越快），卻不能給你較高的極限星等。如果你希望在短時間內拍到較暗的天體，你應使用低焦比的系統，但如果你希望拍到最暗的天體，你應使用長焦的系統。

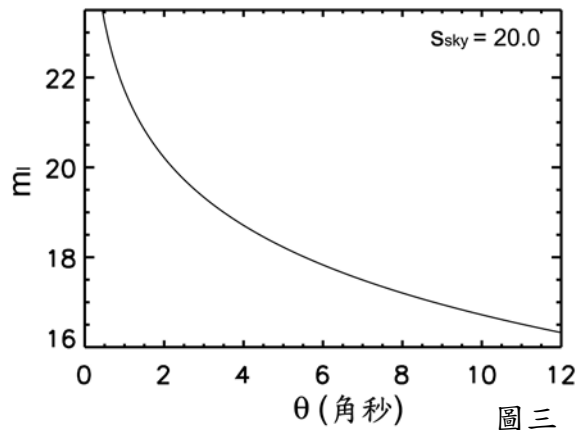


圖二

從實用的角度來看，圖二應是最適合業餘攝星者作為評量極限星等之用，你只要知道自己使用的光學系焦距，再從底片上量出最小星像直徑，配合你的

攝星地的天空亮度，便可知極限星等。但圖二有一點具有誤導性，並不是採用長焦的系統就一定會有較高的極限星等，很重要的一個原因便是，越長焦的系統拍出的星像往往越大，這會抵消一部份長焦距帶來的優勢。

概念上較一目瞭然但卻較不實用的畫法是如圖三一般。圖三是依(7)式所畫出，可以看到，角解析力越高（ θ 越小），極限星等便越高。依我文章中所述的概念，真正影響極限星等的是攝影解析力，既不是星像直徑也不是焦距其中的任何單一項，而是二者之比值。



追根究柢，要提高極限星等，只有兩條路：提高解析力，尋找天空背景光較低之地點。後者受限於地理環境，除非我們前往國外的優良天文地點，在台灣，實在很難擺脫光害，因此恐怕只有從解析力下手。

影響解析力的因子有很多，在使用短焦距的系統時，解析力往往受限於底片粒子的大小以及光學系統的像差，這時要提高解析力，便需從使用細粒子的底片及高性能的光學系統著手。在使用長焦距（至少 500mm 以上）的系統時，解析力除了受光學系統品質影響外，亦受到大氣條件的限制。台灣的高山上，一般的大氣寧靜度都在 2 角秒以上，較少好到 1.5 秒以下。也就是說，我們的極限星等最終極的限制便在於這 1.5 秒的解析力。根據圖三，以台灣的大氣條件及天空亮度，不論我們使用怎樣的底片或怎樣的望遠鏡，極限星等都難達到 21 等以上。

不過，讀者們不要忘記，以上我說在台灣很難達到 21 等的極限星等，是基於狀況一的條件。如果你有濃度儀以應用(16)式、或透過掃瞄器來疊合多張的曝光，甚至，你不使用底片而用 CCD 來拍照，當然是可以達到 21 等以上的極限星等的。

註釋

註一：最小星像直徑亦有公式可計算，但因超出本文的探討範圍，此處不予詳述，有興趣的讀者不妨參考我的“談星野攝影的底片”一文。

註二：這個平均濃度為 1.0 的要求並不特別影響我們此處的計算，事實上，對大部份底片來說，要達到最高訊噪比，確是要透過大量的曝光讓天空背景的曝光達到 1 左右。換句話說，我們以長時間的曝光追求極限星等的話，底片上的背

景濃度會自動符合 rms 粒狀性的濃度 1.0 條件。

註三：在星點直徑 25 μm 附近或以下，兩條曲線開始交錯，這一部份我並不建議讀者們過於認真看待。這是因為此時的星點大小已不比底片的粒子大很多，回顧在狀況一時我做的第二個假設，當星點大小只比底片的粒子大幾倍時，此假設便不再精確。所以狀況(1)的公式，依使用底片的不同而有不同的應用下限，對大部份的底片來說，25 μm 已經有點接近此下限了。

註四：本文原出處為 [ALOHA えび小站](#)

版權聲明

本文作者是王為豪（whwang@asiaa.sinica.edu.tw），本文著作權歸作者所有。只要將此版權聲明原封不動地放在文章中，並以此為唯一的版權聲明，任何人可自由地以任何形式修改、複製與散佈全部或部份的本文，包括販售圖利，以及將本文重新排版成各種檔案格式，而不需經任何人同意。請你注意的是，不論你如何散佈或修改本文，除了這段版權聲明，你不能對你的散佈品作任何其它的限制，也就是你不能限制他人散佈你的散佈品，否則作者將對你採取法律行動。如果你對擴充或修改本文有任何建議，請與作者聯絡，作者將樂於把你的大名放在本文的擴充版本裡。