第一章　电磁现象的普遍规律

本章由静止和变化的电磁场实验定律出发，总结出描述电磁场变化规律的麦克斯韦方程组及洛仑兹力的公式。这些方程是宏观电磁场论的理论基础。在以后各章中将应用它们来解决各种与电磁场有关的问题。

内 容 提 要

电磁场的观念

★ 电磁场是物质存在的一种形态;

★ 表征：与其它带电物质以一定形式发生相互作用;

★ 特点：分布于广域空间;

★ 描述方法：两个矢量函数;

- ◆ 电场强度：　$\boldsymbol{E}(x, y, x, t)$
- ◆ 磁感应强度：　$\boldsymbol{B}(x, y, x, t)$

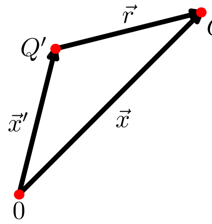
★ 运动规律：麦克斯韦方程组;

★ 研究方法：求解 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{E}$ 所满足之偏微分方程。

第一节　库仑定律和静电场

§ 1.1　库仑(Coulomb)定律

★真空中静止点电荷 Q' 对另一个静止点电荷 Q 的作用力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向



1785，库仑定律是基本实验定律，并没有解决物理本质问题

$$\boldsymbol{F} = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Q'Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})$$

其中 ε_0 为介电常数，又称电容率。

★对库仑定律的两种物理解释:

- ◆两电荷之间的作用力是超距作用：电荷——电荷;
- ◆近距作用：电荷——电场——电荷;

在静止情况下是无法分辨的

电场是物理实在的

★电荷产生的电场:

电场的特征性质是对电荷有作用力，我们就利用这性质未描述该点上的电场。一个单位试验电荷在场中所受的力来定义电荷所在点的电场强度

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

【讨论】 $\boldsymbol{F} \propto \frac{1}{r^{(2+\delta)}}$ ， δ 的极限值 2.7×10^{-15}

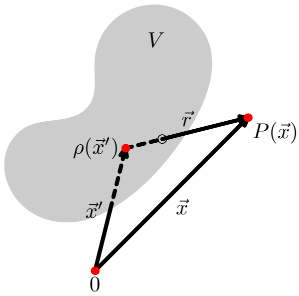
平方反比定律不仅是高斯定律的基础，而且蕴含着光子质量为零的深刻意义

§ 1.2 连续电荷分布产生的静电场

其系数定义了电荷的单位，这里的形式是国际单位制

叠加性原理：实验原理，线性理论

先点电荷、再分离的电荷、再连续分布：数学上从单粒子到多粒子求和、再到体积分



★对连续的电荷分布:

◆力的叠加性导致静电场的叠加性

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3} \boldsymbol{r} dV'$$

★静电场，电荷静止，场与时间无关（参考系问题）

1.一个电荷和它邻近的电场相互作用，2.一点上的电场和它邻近的电场怎样联系，即要找出静电场规律的微分形式。

§ 1.3 高斯(Gauss)定理

电通量总是正比于电量。

★高斯定理积分形式:

$$\oint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho dV$$

其中 V 由 $\boldsymbol{S}$ 所包围。

◆散度的定义:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

★高斯定理微分形式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

【讨论】

◆局域性：电场的散度仅仅与当地的电荷相关；

◆有源场：电荷为电场之源

◆静电场：库仑定律为静电场下的结论，但高斯定理却始终成立。

而远处的场则是通过场本身传递过去的

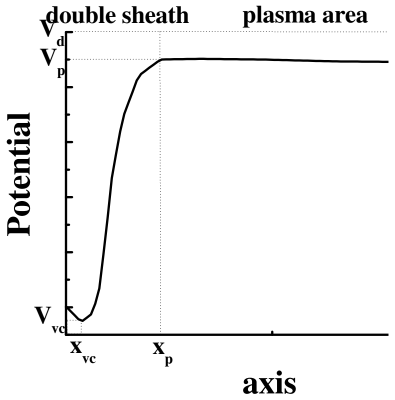
没有电荷，散度为零

§ 1.4　电荷对电场作用的局域性

★一维平板模型

$$\frac{dV}{dx} = -E$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



★电压曲线的曲率表征该处是富电子还是富离子性。

§ 1.5　高斯定理的证明

【已知】

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【求证】

$$\oint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho dV$$

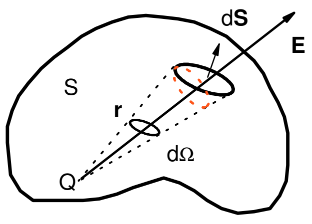
【证明】

$$\oint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_S [\iiint\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'] \cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho(\boldsymbol{x}')(\oint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot d\boldsymbol{S})dV'$$

高斯定理的证明（续）

其中用到：由于如图所示

$$\frac{\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} = d\Omega$$



故当$\boldsymbol{x}'$在S范围之外时$(x' \notin S)$，有

$$\oint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

而$\boldsymbol{x}'$在S范围之内$(x' \in S)$，

即

$$\oint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi$$

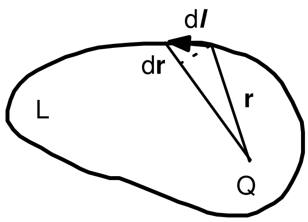
故

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

§ 1.6 静电场的旋度

旋度是矢量场性质的一个方面，要确定一个矢量场，还需要给出共旋度。旋度所反映的是场的环流性质

$$\begin{aligned}
\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L [\iiint_\infty \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV']\cdot d\boldsymbol{l} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')(\oint_L \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{l})\, dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')(\oint_L \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{r})\, dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')[\oint_L d(-\frac{1}{r})]\, dV' = 0
\end{aligned}$$



其中推导过程中利用了 $d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{x} = d(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}') = d\boldsymbol{r}$ ，以及 $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r$

★斯托克斯(Stokes)定理： $\oint_L \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$

★静电场是无旋场： $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$

只是静电场才是无旋的。

§ 1.7 静电场高斯定理的直接证明

【已知】

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'$$

【求证】

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

【证明】

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_V \rho(\boldsymbol{x}')\,[\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}]dV'$$

我们知道：当$r\neq 0$时有

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla(\frac{1}{r^3})\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) = -\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3} = 0$$

故此上面体积分只需对$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq \varepsilon \ll 1$的小球进行，这时可取$\rho(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x})$，并抽出积分号外可得：

静电场高斯定理的直接证明（续）

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{r\le\varepsilon}[\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}]dV' = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{r\le\varepsilon}(-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})dV' \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{r\le\varepsilon}(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})dS'
\end{aligned}
$$

又因为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与面元$d\boldsymbol{S}'$反向，且:

$$
\oint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint d\Omega = 4\pi
$$

故此

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}
$$

§ 1.8　静电场无旋性的直接证明

【已知】

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{r^3}\boldsymbol{r}dV'
$$

【求证】

$$
\nabla\times\boldsymbol{E} = 0
$$

【证明】

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')[\nabla(\frac{1}{r^3})\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}(\nabla\times\boldsymbol{r})]dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\infty \rho(\boldsymbol{x}')[-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{r^3}\times 0]dV' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

中间也可利用

$$
\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla\times(\nabla\frac{1}{r}) = 0
$$

§ 1.9　小结

- ★ 库仑定律;
- ★ 叠加性原理;
- ★ 高斯定理与电场的散度;
- ★ 静电场是无旋的;

【习题】 Page 45: 1,2,3

第二节　毕奥–萨伐尔定律与静磁场

§ 2.1　电流密度

磁、电不可分。稳恒磁场是和稳恒电流相关的，在讨论磁场之前，先说明电流分布的规律性。

电流的分布（空间、时间）

★电流密度的定义

$$\boldsymbol{J} = \frac{dQ}{dt\,dS\,\cos\theta} \cdot \boldsymbol{e}_I = \frac{dI}{dS\,\cos\theta} \cdot \boldsymbol{e}_I$$

$$I = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

★电流密度的微观解释

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} = nq\boldsymbol{v}$$

★多种成分的电流密度

$$\boldsymbol{J} = \sum_i \rho_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i n_i q_i \boldsymbol{v}_i$$

§ 2.2　电荷守恒定律

这是一条精确、基本实验定律

什么是基本属性？有基本作用才成为基本属性，适当时才能体现。质量、电荷、自旋

无论化学反应、原子核反应

任一闭合曲面，可以流进流出，但由于没有源项（不能产生或消灭电荷），故此流入流出的量应该等于变化率

连续性方程适用很广：电流、粒子流、能流

★电荷是物质的基本属性之一
★系统总电荷保持不变
★电流的连续性方程积分形式

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

★电流的连续性方程微分形式

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{J}\, dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

电荷守恒定律（续）

【讨论】

◆全空间总电荷守恒

从偏微分到全微分的区别

$$\frac{d}{dt} \iiint_\infty \rho\, dV = 0$$

◆稳恒电流下的情况

动平衡，随时间的偏微分为零

稳恒电流是无源的、也即是闭合的

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

§ 2.3 毕奥—萨伐尔(Biot—Savart)定律

★电流之间的作用力—电流激发磁场—磁场的特征性质—磁感应强度

实验定律

$$dF = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

★恒定的体电流激发的磁感应强度

大小和r^2成反比

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV'$$

真空磁导率μ_0

★线电流激发的磁感应强度

这是磁场分布的积分形式；要求细致的情况，贴近场的特点，需要了解电流元与邻近磁场关系、邻近磁场与磁场间关系：微分形式

$$\boldsymbol{J} dV' = \boldsymbol{J}\,(d\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{J}\, dS_n)\, dl = I\, d\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

§ 2.4 磁场的环量和旋度

★安培(Ampère)环路定律

◆载流导线产生的磁场，沿任意闭合曲线的环量与通过该闭合曲线所围曲面的电流成正比

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\, I$$

◆不通过闭合曲线所围曲面的电流对环量没有贡献。

安培定律可以用来导出电流与其邻近磁场的环量关系，排除其他地方流过的电流产生影响。

★连续电流分布的环量定律

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

★磁场的旋度

从回路的任意选取，以及数学上的高斯定理，可得出

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

§ 2.5 磁场的散度

★磁力线是闭合曲线，磁感应强度是无源场

★磁场无源性的积分形式:

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

上式对任意闭合曲面都成立。

★磁场无源性的微分形式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

【讨论】

◆磁场的无源性是普适的

原因就是磁单极子

◆寻找磁单极子:

麦克斯韦方程的对偶性、无源时成立，有源时对偶性破坏

§ 2.6 磁场散度的证明

【已知】

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{r}}{r^3} dV'$$

【求证】

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

【证明】

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \nabla(\frac{1}{r}) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla(\frac{1}{r}) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \times [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}] dV' \\
&= \nabla \times [\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'] \\
&= \nabla \times \boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

磁场散度的证明（续）

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

所以:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

§ 2.7 磁场旋度的证明

【已知】

用$\boldsymbol{A}$的好处是：比起biot定律，积分号中的叉乘移动到了积分号外。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad , \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r} dV'$$

【求证】

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

【证明】由于

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

★先求解$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \cdot [\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}] dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla \cdot [\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}] dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla\frac{1}{r}\, dV'
\end{aligned}$$

磁场旋度的证明（续一）

由于

$$r = |x - x'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

因此对r的函数而言，对$\boldsymbol{x}$的微分与对$\boldsymbol{x}'$的微分仅差一个负号，故而

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}\,dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \{\nabla'\cdot[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}] - \frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\}\,dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{r}\,d\boldsymbol{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV'\end{aligned}$$

因为其一是对整个电流区域积分，其二电流稳恒，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

磁场旋度的证明（续二）

★再来看$\nabla^2\boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} &= \nabla^2[\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV'] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla^2\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\,dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\nabla^2\frac{1}{r}\,dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV'\end{aligned}$$

我们知道：当$r \neq 0$时有 其实$\nabla^2\frac{1}{r}$是$4\pi\delta$ 函数

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \nabla(\frac{1}{r^3})\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\boldsymbol{r}) = -\frac{3}{r^4}(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}) + \frac{3}{r^3} = 0$$

故此上面体积分只需对$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq \varepsilon \ll 1$的小球进行，这时可取$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$，并抽出积分号外可得:

磁场旋度的证明（续三）

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\iiint_{r\leq\varepsilon} \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\iiint_{r\leq\varepsilon} \nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\oint_{r=\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot dS'\end{aligned}$$

又因为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$与面元$d\boldsymbol{S}'$反向，且:

$$\oint_S \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint d\Omega=4\pi$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

由此可得磁场旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

磁场旋度的证明（续四）

【讨论】 ◆局域性：某点邻城上的磁感强度的旋度只和该点上的电流密度有关。

◆空间中存在的磁感应强度（电场强度），尽管场强是服从叠加原理的，尽管可能都有不为零的磁场环量（电通量），但是磁场（电场）的旋度（散度）只存在于有电流分布（电荷存在）的地方，而在周围空间中的磁场是无旋（源）的。

◆上式仅在静磁场下才成立。

该性质对我们了解问题带来很大的帮助。

§ 2.8 小结

- ★ 电荷守恒定律精确成立;
- ★ 稳恒电流激发恒定磁场，磁感应强度的大小和方向由毕奥——萨伐尔定律给出;
- ★ 恒定磁场旋度和该点处电流密度成正比;
- ★ 磁场是无源的。

【习题】Page 46: 4,5

第三节 麦克斯韦(Maxwell)方程组

§ 3.1 静电场和静磁场的方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

【推广】 变化的电、磁场可以互相激发:

- ★ 变化磁场激发电场(法拉第电磁感应定律);
- ★ 变化电场激发磁场(麦克斯韦位移电流假设)。

§ 3.2 法拉第电磁感应定律

闭合线圈中的感应电动势与通过该线圈内部的磁通量变化率成正比，其方向选取：阻碍磁通量变化。

1831年，一般情况下的电场旋度

是实验定律

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint\limits_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int\limits_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

【讨论】

★ 变化的磁场产生有旋的电场，这是和闭合回路的选取没有关系；

★ 运算过程中$\frac{d}{dt}$变到$\frac{\partial}{\partial t}$需要回路$L$固定不变。

$\frac{d}{dt}$在积分号外，不含x, y, z; $\frac{\partial}{\partial t}$在积分号内，含$x$, y, z;

$\frac{d}{dt}$包括两部分：被积函数的变化以及积分区域的变化;

§ 3.3 位移电流

一般情况下的磁场旋度

是先写出来的，然后再从实验检验

★已知静磁场下

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$$

$$0 = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t} =?$$

方程右端仅在稳恒状态下才等于零。

★从两方面入手进行推广　　◆当$\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow 0$时，方程右端应该回到稳态情况。故可以猜测形式如下：

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}$$

位移电流（续）

◆用电荷守恒定律确定f的形式

$$\begin{aligned}0 = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) &= \nabla\cdot(\mu_0\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t})\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\,\rho - \nabla\cdot\boldsymbol{f})\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\varepsilon_0\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \nabla\cdot\boldsymbol{f})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f} = \mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E} \qquad , \qquad \boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_D)$$

§ 3.4 真空中Maxwell方程组

1864年，20个标量方程;

1900年Gibbs发表矢量文章，才是这个形式

一般情况下电荷电流激发电磁场以及电磁场内部运动规律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

【讨论】

★ρ、$\boldsymbol{J}$为源项，可以激发电磁场;
★即使源项ρ、$\boldsymbol{J}$为零，电磁场通过互相激发仍能存在;
◆首先在理论上预言了电磁波;
◆电磁场可以独立于电荷之外。

§ 3.5 麦克斯韦方程组的完备性

★ 六个未知数，八个方程?

★ 从空间角度来看，两种不同的看法:

◆ 麦克斯韦方程组中包含了电荷守恒定律

◆ 方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$也可被导出

★ ∇具有矢量特性，点乘描述一个方向，叉乘描述两个方向

★ 从时间角度而言，其中两个方程为边条件

§ 3.6 洛仑兹(Lorentz)力

电荷、电流产生场，场对电荷体系有作用

欧姆定律或磁化、极化规律可结合前者与物质结构的微观模型推导出来。

平均电场的概念：事实上物质由原子核和电子构成，宏观模型求的是平均效应

不考虑微观结构的原因：其一是不可能（数量巨大，且不可能完全精确）其二是不必要（宏观观测场与场的详细性质无关）

★由库仑定律和安培定律可知：静止电荷分布与恒定电流元所受力为:

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

★洛仑兹力：普遍情况下带电粒子的受力情况

$$\boldsymbol{f} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

【讨论】

◆洛伦兹力是在电子发现之前就写出来的;
◆实践证实了洛伦兹公式对任意运动速度的带电粒子都是适用的;
◆麦克斯韦方程组与洛仑兹力构成了电动力学的基本理论基础。

§ 3.7 小结

★ 静电场和静磁场的方程组;

★ 法拉第电磁感应定律;

★ 麦克斯韦位移电流假设;

★ 真空中Maxwell方程组;

★ 洛仑兹力公式;

【习题】Page 46：6,10

第四节 介质的电磁性质

§ 4.1 介质的极化

★微观上：分子的电偶极矩

在外场作用下，或者分子正负电中心被拉开，或者分子电偶极矩平均有一定取向性，形成宏观电偶极矩分布

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$$

★宏观上：电极化强度矢量

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Sigma\,\boldsymbol{p}_i}{\Delta V} = n\,\boldsymbol{p}$$

★束缚电荷密度

$$\iiint\limits_V \rho_P\, dV = -\oint\limits_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

介质的极化（续）

★束缚电荷面密度不均匀性通常的情况表现在两种介质的交界面上

$$\sigma_P dS = \Delta Q = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\sigma_P = -n\cdot(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)$$

【讨论】★面电荷密度指在n方向上的体密度有跃变（与不均匀性密切相关）★面电荷密度仅是一种理想的简化模式

§ 4.2 极化电场

真空中的麦克斯韦方程组是普适的：只要有电荷，就会产生电场

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_f = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}' = \frac{\rho_P}{\varepsilon_0} \quad , \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{E}'$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P) \quad , \quad \rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_P) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P}) \quad , \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_f$$

★引入电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$$

极化电场（续）

★对于各向同性、线性介质极化强度$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{E}$之间是简单的线性关系：

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

其中χ_e称为介质的极化率。故此$\boldsymbol{D}$可线性地表示为：

量纲是多少？

导体的ε是多少？

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

其中ε称为介质的电容率，ε_r为相对电容率。

§ 4.3 介质的磁化

在外磁场作用下，分子电流出现有规则取向，形成宏观磁化电流密度

★微观上：分子的磁偶极矩（分子电流）

$$\boldsymbol{m} = i\boldsymbol{a}$$

★宏观上：磁化强度

$$M = \frac{\Sigma\, \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} = n\, \boldsymbol{m}$$

★磁化电流密度

$$\iint_S \boldsymbol{J}_M \cdot d\boldsymbol{S} = I_M = \oint_L ni\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_L n\boldsymbol{m} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_L M \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{J}_M = \nabla \times \boldsymbol{M}$$

★当电场变化时，有极化电流：

$$\boldsymbol{J}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{\Sigma e_i \boldsymbol{v}_i}{\Delta V}$$

§ 4.4 介质中的磁场

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_f=\mu_0\boldsymbol{J}_f+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{B}'=\mu_0\boldsymbol{J}_M+\mu_0\boldsymbol{J}_P\ ,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_f+\boldsymbol{B}'$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_f+\mu_0\boldsymbol{J}_M+\mu_0\boldsymbol{J}_P+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\ ,\ \boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}\ ,\ \boldsymbol{J}_P=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M})=\mu_0\boldsymbol{J}_f+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

★引入磁场强度

由于历史原因，$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$名字相对应：虽然物理内容上这是不当的，但方程形式上两者地位相等;

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

介质中的磁场（续）

★对于各向同性、非铁磁物质磁化强度$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{H}$之间是简单的线性关系:

$$\boldsymbol{M}=\chi_M\boldsymbol{H}$$

其中χ_M称为介质的磁化率。故此$\boldsymbol{B}$可线性地表示为:

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\mu=\mu_r\varepsilon_0\qquad,\qquad\mu_r=1+\chi_M$$

其中μ称为介质的磁导率，μ_r为相对磁导率。

§ 4.5 介质中的麦克斯韦方程组

用$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{H}$之后方程形式得以简化；要注意用量纲来帮助记忆:

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

★反应介质宏观电磁性质的本构关系式（Constitutive Equation）

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$$

★本构关系式的适用范围：各向同性、线性、非铁磁的（单值、与历史无关）、随时间变化？随空间变化？不同频率、强度电磁波？

§ 4.6 小结

★ 介质的极化;

★ 介质的磁化;

★ 介质中的麦克斯韦方程组;

【习题】Page 46: 7,9

第五节 电磁场边值关系

★ 要解决电磁场问题，还需要边界条件;

★ 在外场作用下，介质界面会出现面束缚电荷和电流分布;

★ 束缚电荷、电流的存在使得界面两侧场量发生跃变;

★ 研究边值关系的基础是积分形式的麦克斯韦方程组;

★ 麦克斯韦方程组微分与积分形式的区别;

- ◆ 从数学方面而言：微分形式中存在δ函数;
- ◆ 从物理方面而言：积分形式多为实验验证;

§ 5.1 积分形式的麦克斯韦方程组

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I_f + \frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_f$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

§ 5.2 法向分量的跃变

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_f = \iiint_V \rho_f\, dV$$

$$\boldsymbol{D}_2\cdot d\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{D}_1\cdot d\boldsymbol{S}_1 + (\boldsymbol{D}_1\cdot\delta\boldsymbol{S}_1) + (\boldsymbol{D}_2\cdot\delta\boldsymbol{S}_2) = \rho_f\,\delta h\,\Delta S$$

★由于$\boldsymbol{D}$有限，且$\delta\boldsymbol{S}_1 \propto \delta h \to 0$故此:

问题：δh趋于零时，面密度σ_f的定义对不对？这里存在两个无穷小量。

$$(\boldsymbol{D}_1\cdot\delta\boldsymbol{S}_1) + (\boldsymbol{D}_2\cdot\delta\boldsymbol{S}_2) \to 0$$

$$(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta S=\rho_f\,\delta h\,\Delta S=\sigma_f\,\Delta S$$

★由$\boldsymbol{S}$选取的任意性可知:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f$$

★同理:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

§ 5.3 切向分量的跃变

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I_f+\frac{d}{dt}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{H}_2\cdot d\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{H}_1\cdot d\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{J}_f\cdot(\delta\boldsymbol{h}\times d\boldsymbol{l}_2)+[\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot(\delta\boldsymbol{h}\times d\boldsymbol{l}_2)]$$

★由于$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$有限，且$\delta h\rightarrow 0$故此:

同样存在两个无穷小量：1. 回路上下边大到足够包括多分子层内部，使面电流完全通过回路内部；2. 从宏观来说回路短边的长度仍可看作趋于零。

$$[\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot(\delta\boldsymbol{h}\times d\boldsymbol{l}_2)]\rightarrow 0$$

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}_f\cdot(\delta\boldsymbol{h}\times d\boldsymbol{l})=(\boldsymbol{J}_f\,\delta h)\cdot(\boldsymbol{n}\times d\boldsymbol{l})=\boldsymbol{\alpha}_f\cdot(\boldsymbol{n}\times d\boldsymbol{l})$$

★由于$\boldsymbol{n}$与$d\boldsymbol{l}$相互垂直，故此

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot d\boldsymbol{l}=[(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))\times\boldsymbol{n}]\cdot d\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{\alpha}_f\times\boldsymbol{n})\cdot d\boldsymbol{l}$$

切向分量的跃变（续）

★由$d\boldsymbol{l}$的任意性可知:

$$(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))\times\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{\alpha}_f\times\boldsymbol{n})\quad\Rightarrow\quad[(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))-\boldsymbol{\alpha}_f]\times\boldsymbol{n}=0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)]=0\ ,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_f=0\ \Rightarrow\ [(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1))-\boldsymbol{\alpha}_f]\cdot\boldsymbol{n}=0$$

★故此:

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f$$

★同理:

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

§ 5.4 小结

★和麦克斯韦方程组一一对应的边值关系

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f\quad,\quad\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f\quad,\quad\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

- 面电荷分布使界面两侧电场法向分量发生跃变;
- 面电流分布使界面两侧磁场切向分量发生跃变;

★微分形式及其对应的边值关系

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1)+\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$$

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \quad\Leftrightarrow\quad \sigma_P=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$$

$$\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)=\boldsymbol{\alpha}_M$$

【习题】Page 47：8,11,12

第六节　电磁场的守恒定律

§ 6.1　电磁场和带电粒子间的能量守恒

电磁场是一种物质，同样有能量、动量、角动量。

电磁场和带电粒子可以相互交换能量（动量）。

★ 电磁场的能量、动量是分布于整个空间的;

★ 电磁场的能量、动量是可以随时间变化的;（传播）

- ◆ 电磁场的能量密度$\omega=\omega(\boldsymbol{x},t)$：单位体积的能量
- ◆ 电磁场的能流密度$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)$：单位时间垂直穿过单位横界面的能量，方向为能量传输的方向

★ 能量守恒定律的积分形式

$$-\oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV+\frac{d}{dt}\int\omega\,dV$$

- ◆ 其中场对带电粒子所作功率：$\int\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV$
- ◆ 场的能量增加率：$\frac{d}{dt}\int\omega\,dV$
- ◆ 通过界面S流入的能量：$-\oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$（负号是由于$d\boldsymbol{\sigma}$是向外的导致）

电磁场和带电粒子间的能量守恒（续）

★能量守恒定律的微分形式

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

★当积分区域包括整个空间（或$\boldsymbol{S}$流入流出为零）时，总能量守恒：

$$\int_\infty\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dV=-\frac{d}{dt}\int_\infty\omega\,dV$$

§ 6.2　电磁场的能量密度与能流密度

【已知】洛仑兹力公式$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 【求解】形如

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

方程中ω与$\boldsymbol{S}$的场量表达式。

【解】

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=(\rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$$

★利用麦克斯韦方程组将$\boldsymbol{J}$写为

$$\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

电磁场的能量密度与能流密度（续一）

可得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}&=(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

★经比较可得

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

★能流密度$\boldsymbol{S}$又称之为坡印亭矢量(Poynting矢量)

电磁场的能量密度与能流密度（续二）

★能量密度必须分不同情况讨论:　　◆真空中

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\qquad,\qquad\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$$

$$\omega=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

◆把极化能和磁化能包括在介质的总电磁能量中，可给出一般介质中场能量的改变量:

$$\delta\omega=\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}$$

◆对于各向同性的线性介质

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\qquad,\qquad\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$$

§ 6.3　电磁场的动量密度与动量流密度

【已知】 洛仑兹力公式$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ 【求解】 形如

动（能）量的转化有两种途径：场与带电粒子相互作用；场在空间中的流动

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=-\boldsymbol{f}$$

方程中$\boldsymbol{g}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$的场量表达式。

【解】 利用麦克斯韦方程组将ρ、$\boldsymbol{J}$写为

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

电磁场的动量密度与动量流密度（续一）

★并带入洛仑兹力公式$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$可得:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= (\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) \times \boldsymbol{B} \\
&= (\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \varepsilon_0(\boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}) \\
&= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \varepsilon_0(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \varepsilon_0(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} \\
&+ \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

★由于:

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2$$

电磁场的动量密度与动量流密度（续二）

故:

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} &= (\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2 \\
&= \nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) - \frac{1}{2}\nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) \\
&= \nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2)
\end{aligned}$$

◆其中用到张量计算公式:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$$

◆单位张量$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}$具有性质

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \boldsymbol{v}$$

电磁场的动量密度与动量流密度（续三）

★同理:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}} B^2)$$

★故此可得:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \nabla \cdot [-\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)] = -\boldsymbol{f}$$

★其中：电磁场动量密度$\boldsymbol{g}$为

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

★电磁场动量密度与能流密度间的关系：

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

电磁场的动量密度与动量流密度（续四）

★电磁场动量流密度$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)$$

- 电磁场动量流密度张量又称为麦克斯韦应力张量或张力张量
- 张量$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$的分量$T_{ij}$的意义是通过垂直于$i$轴的单位面积流过的动量$j$分量。

★电磁场动量守恒的积分形式

$$\frac{d}{dt}\iiint \boldsymbol{g}dV = -\iiint \boldsymbol{f}dV - \oint d\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$

§ 6.4 例题

同轴传输线内导体半径为a，外导线半径为b，两导线间为均匀绝缘介质。导线载有电流I，两导线间的电压为U。

（1） 忽略导线的电阻，计算介质中的能流S和传输功率；

（2） 计及内导线的有限电导率，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率。

【解】（1） 由安培环路定律可知，$a < r < b$处的磁场强度：

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta$$

★设导线上线电荷密度为τ，由高斯定理可知，$a < r < b$处的电场强度：

$$\boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\boldsymbol{e}_r$$

★由导线间电压：

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon U}{\ln\frac{b}{a}}$$

例题（续一）

★故坡印亭矢量为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{UI}{2\pi\ln\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_z$$

★总传输功率为

$$P = \int_a^b S\, 2\pi r dr = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\ln\frac{b}{a}r^2} 2\pi r dr = \frac{UI}{\ln\frac{b}{a}}\int_a^b \frac{1}{r}dr = UI$$

例题（续二）

（2） 导体内部电场强度:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

★由电场强度切向分量连续可知，$a<r<b$处的电场强度既有r分量又有z分量，其z分量为

$$\boldsymbol{E}_z|_{r=a}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}\boldsymbol{e}_z$$

★故此能流S除了如前所述z方向分量外，还增加有$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_r$方向分量:

$$S_r=E_zH_\theta|_{r=a}=\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}$$

★流进单位长度δl导线内部的功率为

$$S_r\cdot 2\pi a\delta l=\frac{I^2\cdot 2\pi a\delta l}{2\pi^2a^3\sigma}=I^2\frac{\delta l}{\pi a^2\sigma}=I^2R$$

- 流进导体内部的能流转化为欧姆加热;
- 能量传输不是从导体中通过，而是在导线周围的介质中传输。

§ 6.5 小结

- ★ 电磁场和带电物质间满足能量守恒、动量守恒定律;
- ★ 能流密度（坡印亭矢量）$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$;
- ★ 各向同性线性介质中电磁场能量密度$\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$;
- ★ 电磁场动量密度$\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$;
- ★ 电磁场动量流密度张量

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

【习题】Page 48：13,14