

第二章 静电场

在给定的自由电荷分布以及空间介质和导体分布的情况下怎样求解静电场。

内 容 提 要

1 静电场的标势	1
2 静电场的唯一性定理	5
3 分离变量法	10
4 镜象法	15
5 格林(Green)函数	20
6 电多极矩	24

第一节 静电场的标势

§ 1.1 静电标势的引入

★静电场的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

★静电场是无旋的 \Rightarrow 可以用一个标势来描述静电场; ◆电场沿任一闭合回路的环量积分等于零:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

◆电荷由 P_1 移至 P_2 时电场所作的功与路径无关, 而只和两端点有关。

$$\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

◆把单位正电荷由 P_1 移至 P_2 , 电场所作的功定义为 P_1 至 P_2 的电势差:

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

负号的指代电场对电荷作正功则电势下降
这是电势定义的积分形式

§ 1.2 电场强度 \mathbf{E} 与电势 φ

★相距为 $d\mathbf{l}$ 的两点间电势差为:

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

由于

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l}$$

比较可知

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

★只有势的差值才有物理意义。

★一般参考点的选取**无穷远**或**地** ($\varphi \propto \frac{1}{r}$)

电场强度 \mathbf{E} 与电势 φ 可以
互相求得

$$\varphi(P) = \oint_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

§ 1.3 关于电势的讨论

★电势参考点的选择**无穷远**和**地**是统一的;

◆大地是半径无穷大的导体, 故此大地也是无穷点;

◆用半径为无穷大导体模型可说明**无穷远点**和**地**电势相同;

★电势 φ 能否替代电场强度 \mathbf{E} ?

仅在静电情况下可以。

★在电荷密度为零的空间中不存在电势的极值;

§ 1.4 连续分布电荷的电势

★点电荷的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

★点电荷的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

★电势同样满足叠加性原理, 多个电荷的电势

什么是线性? 那个量是线性的?

$$\varphi(P) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

★连续分布电荷的电势

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

★对于实际情况, 上式是不够的:

◆导体(或介质)中的感应电荷(束缚电荷)并不是明确可知的;

◆电势的微分形式有助于研究其性质;

§ 1.5 静电势的微分方程和边值关系

★在均匀各向同性线性介质中:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

称之为**泊松(Poisson)方程**

除了方程, 还需要有边界条件

★电场的边值关系

需要几个边界条件?

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

★静电标势的边值关系

◆由边界层电场强度有限, 可知

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

◆由 $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E} = -\varepsilon_2 \nabla \varphi$ 可知

电场边值关系的法向分量

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = -\varepsilon_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sigma_f$$

静电势的微分方程和边值关系 (续)

◆需要指出: $\varphi_1 = \varphi_2$ 即是对应着电场边值关系的切向分量:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \Rightarrow? \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

★证明如下:

◆在介质边界两侧选两组点: P_1 与 P_2 , P'_1 与 P'_2 满足

$$\varphi_{P_1} = \varphi_{P_2}, \quad \varphi'_{P_1} = \varphi'_{P_2}$$

◆设 P_1 与 P'_1 , P_2 与 P'_2 相距 $\Delta \mathbf{l}$

$$\varphi'_{P_1} - \varphi_{P_1} = \varphi'_{P_2} - \varphi_{P_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}$$

◆由于 $\Delta \mathbf{l}$ 的任意性可知:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

§ 1.6 导体的静电条件

★导体的性质源自于其内部有自由电子;

★在静电条件下分析电子的受力平衡可知如下性质:

- ◆导体内部电场为零;
- ◆导体内部不带电, 电荷只能分布于导体表面上;
- ◆导体表面上电场必沿法线方向;
- ◆导体表面为等势面整个导体的电势相等。

两个不是静电场下的导体
例子: 其一超导体(有电导率), 其二 γ 光子

★导体表面的边界条件

$$\varphi = \text{const}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sigma_f$$

★已知泊松方程、边值关系和边界条件, 我们就可唯一地确定电场。

§ 1.7 静电场的能量

★各向同性线性介质中能量密度:

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

★静电场的能量:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$$

将 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 带入可得:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} &= -\nabla\varphi \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} \\ &= -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \rho\varphi\end{aligned}$$

故此

静电场的能量 (续一)

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \int_{\infty} (-\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \rho\varphi) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho\varphi dV - \frac{1}{2} \int_{\infty} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho\varphi dV - \frac{1}{2} \oint \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

因为 $\varphi \propto \frac{1}{r}$, $\mathbf{D} \propto \frac{1}{r^2}$ 而面积 $\propto r^2$, 故此当 $r \rightarrow \infty$ 时有 $\oint \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$, 也即:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho\varphi dV \quad (1)$$

自能? 互能?

★连续电荷分布激发的静电场总能量:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{x}') dV'}{4\pi\epsilon r} \\ W &= \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_{\infty} dV \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{r}\end{aligned} \quad (2)$$

静电场的能量 (续二)

【讨论】

- ◆ 公式1及2仅是在静电场下才成立;
- ◆ 电磁场的能量是分布在场中的, $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 决不是能量密度;
- ◆ 用能量密度可以计算某区域内的电磁场能量, $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 必须进行全空间的积分;
- ◆ 事实上 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 只不过是对静止的带电体产生的能量进行积分的结果。

§ 1.8 小结

- ★ 由于静电场的无旋特性，可以引入一个标势来描述静电场；
- ★ 在静电场下，电势 φ 可以替代电场强度 \mathbf{E} 描述电场；
- ★ 电势 φ 服从泊松方程，且满足相应的法向、切向边值关系；
- ★ 静电场的能量： $W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ ；

【习题】Page 93:1,17

第二节 静电场的唯一性定理

- ★ 哪些因素可以完全确定静电场，这样在解决实际问题时就有所依据；
- ★ 对于提出尝试解，如果满足唯一性定理所要求的条件，确定其为该问题的唯一正确的解；
- ★ 静电场求解方法的基础。

静电屏蔽：导体壳内的电荷对外无影响，导体壳外的电荷对内无影响！

§ 2.1 唯一性定理的表述

【唯一性定理】 设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ ，在 V 的边界 S 上给定

(i) 电势 $\varphi|_S$ 或

狄利克莱(Dirichlet)边界条件

(ii) 电势的法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ 则 V 内的电场唯一地确定。

诺埃曼(Neumann)边界条件

§ 2.2 关于唯一性定理的讨论

唯一性定理的适用条件：

- ★ 是否仅对单一的均匀介质成立？区域 V 中可以包含多个分区，每个分区中可充满着均匀的介质。
- ★ 何谓均匀介质？是否所有的均匀介质均能满足唯一性定理？宏观介电性质不随空间变化的介质可称之为均匀介质；不一定非得是线性的介质，但铁磁介质是不满足的。
- ★ 给定什么样的边界条件能唯一确定电场？是否还有类似的边界条件？上述条件均要求为**闭合**边界；
- ★ 边界条件为什么用的是电势的法向导数，而不是切向分量？用切向分量行不行？如前所述，静电场的边值关系中，电势的连续性与电场的切向分量连续相对应；
- ★ 静电场的边值关系包括两条，唯一性定理的边界条件有几条？一条。两个边界条件是**或**的关系：若要求两个边界条件同时满足，会导致**无解**！

§ 2.3 唯一性定理的证明

【已知】 设给定区域 V 中可以分为若干个区域 V_i ，每一均匀区域的电容率为 ε_i ，且 V 内有给定的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 。电势 φ 在均匀区域 V_i 内满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

在两区域 V_i 和 V_j 的分界面上满足边值关系

$$\varphi_i = \varphi_j$$

且

$$\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j$$

在区域 V 的闭合边界 S 上给定 $\varphi|_S$ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$ 。

【求证】 满足上述条件的电势分布 φ 是唯一的。

【证明】 设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，令

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

唯一性定理的证明（续一）

则由 $\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$ 、 $\nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$ ，得每个均匀区 V_i 内：

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

★在两均匀区界面上有：

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j$$

★在整个区域的边界上有：

$$\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \varphi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial \varphi''}{\partial n}|_S = 0$$

唯一性定理的证明（续二）

★考虑第 i 个均匀区 V_i 的界面 S_i 上的积分

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} \varepsilon_i \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i \nabla \varphi) dV \\ &= \iiint_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV + \iiint_{V_i} \varepsilon_i \varphi \nabla^2 \varphi dV \\ &= \iiint_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV \end{aligned}$$

积分的量纲：能量；物理意义：一个电磁场的能量为零，也就是无电磁场；

★对所有分区 V_i 求和可得:

$$\sum_i \iiint_{V_i} \epsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV = \sum_i \oint_{S_i} \epsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S}$$

★在两均匀区 V_i 和 V_j 的界面上, φ 和 $\epsilon \nabla \varphi$ 的法向分量分别相等, 但 $d\mathbf{S}_i = -d\mathbf{S}_j$, 故上式右边内部分界面的积分互相抵消, 只剩下整个 V 的边界面 S 上的积分:

唯一性定理的证明 (续三)

$$\sum_i \oint_{S_i} \epsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S}$$

★又因为在 S 上, $\varphi|_S = 0$ 或者 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = 0$, 两种情况下面积分都等于零, 故此有

$$\sum_i \iiint_{V_i} \epsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

★由于被积函数 $\epsilon_i (\nabla \varphi)^2 \geq 0$, 上式成立的条件是在 V 内各点上都有:

$$\nabla \varphi = 0$$

★即在 V 内

$$\varphi = \text{const}$$

★电势中的常数对电场没有影响, 故此得证。

§ 2.4 有导体存在时的唯一性定理

设区域 V 内存在导体,

★ 或者给定每个导体上的电势 φ_i (第一类型问题);

★ 或者给定每个导体上的总电荷 Q_i (第二类型问题);

并给定导体外部、 V 内的自由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$, 以及 V 边界 S 上的如下条件

(i) 电势 $\varphi|_S$ 或者

(ii) 电势的法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$

则 V 内的电场唯一地确定。

为简单起见, 以下只讨论区域内含一种均匀介质的情形。

§ 2.5 第一类型问题的证明

对于第一类型问题, 可以转化为无导体时的唯一性定理:

★ 由于导体内部电场为零, 故此可以将导体内部区域从考虑范围内除去;

★ 除去导体部分的区域由 V 变到了 V' ;

★ 相应的, 边界由 S 变成了 S' : S' 不仅包含 S , 而且包括每一个导体表面 S_i ;

★ 每个导体表面 S_i 上都给定了确定的 φ_i ，且 S 上或给出了 $\varphi|_S$ 或给出了 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ ；

★ V' 的边界 S' 上**闭合**地给出了或 $\varphi|_{S'}$ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{S'}$ 的边界条件；

这是一种新的边界条件

★ 由前面证明可知：混合边界条件同样可以满足唯一性定理；除了这三种边界条件外，其它边界条件能否给出唯一性定理？比如柯西边界条件？不行。

★ 第一类型问题得以解决；

§ 2.6 第二类型问题的证明

【已知】 设给定区域 V 中有一些导体，给定导体之外的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ ，电势 φ 在导体区域之外 V' 满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

给定各导体上的总电荷 Q_i ，即第 i 个导体上满足电荷条件：

$$-\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\mathbf{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon}$$

且等势面条件

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i = \text{const}$$

在区域 V 的**闭合**边界 S 上具有给定 $\varphi|_S$ 或 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ 。

【求证】 满足上述条件的电势分布 φ 是唯一的。

【证明】 设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，令

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

第二类型问题的证明（续一）

★ 则 V' 内 φ 满足：

$$\nabla^2\varphi = 0$$

★ 导体表面上有：

$$\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\mathbf{S} = 0$$

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i = \text{const}$$

★ 在整个区域的边界上有：

$$\varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = \frac{\partial\varphi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial\varphi''}{\partial n}|_S = 0$$

第二类型问题的证明（续二）

★对于区域 V' 有公式

$$\begin{aligned}\oint \varepsilon_i \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{V'} \nabla \cdot (\varepsilon_i \nabla \varphi) dV \\ &= \iiint_{V'} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV + \iiint_{V'} \varepsilon_i \nabla^2 \varphi dV \\ &= \iiint_{V'} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV\end{aligned}$$

★上式左侧面积分包括 V 的边界 S 以及每个导体的表面 S_i 。作为 V' 的边界， S_i 的法线指向导体内部，若用 \mathbf{n} 表示导体向外的法线分量，则在 S_i 上的积分为

$$\oint_{S_i} \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = -\varphi_i \oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这里用到了 φ_i 是个常数

★由前所述， S 上的积分也为零，故此：

$$\iiint (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

第二类型问题的证明（续三）

★由于被积函数 $(\nabla \varphi)^2 \geq 0$ ，上式成立的条件是在 V 内各点上都有：

$$\nabla \varphi = 0$$

★故此电场唯一确定。又当导体外的电势确定后，由边值关系

$$-\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma$$

★即可确定导体表面的面密度。

【讨论】由最初的唯一性定理可知，对于Neumann边界条件而言，需要知道边界每一点处的电势法向导数；而导体的第二类型问题中，给出总电量 Q_i 仅相当于给出了 S_i 表面的电势法向导数的积分。条件变弱的原因在于：导体的附加性质——导体面为等势面。

§ 2.7 小结

- ★ 在区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 以及相应的闭合边界条件，即可唯一确定场的分布；
- ★ 有导体的情况下，给定导体之外的区域 V 内自由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 以及相应的外部边界条件，并给出每个导体的电势，即可唯一确定场的分布；
- ★ 保持上述条件不变，用每个导体的所带电量替换其电势，同样可以确定静电场分布。

【习题】 Page 96: 14,15

第三节 分离变量法

§ 3.1 拉普拉斯(Laplace)方程

空间区域 V 内部自由电荷密度 $\rho = 0$, 边界条件可变的物理情况, 可用拉普拉斯(Laplace)方程求解:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

许多实际问题中, 常常用到电荷只出现在导体的表面上, 而空间中没有任何自由电荷分布的情况;

此类问题的解法是求拉普拉斯方程的满足边界条件的解。

- ★ 拉普拉斯方程的通解可以用分离变量法求出;
- ★ 先根据界面形状选择适当的坐标系;
- ★ 然后在该坐标系中用分离变量法解拉普拉斯方程 (最常用的坐标系有球坐标系和柱坐标系)。

§ 3.2 拉普拉斯方程的通解

★拉氏方程在球坐标中的通解为

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, \phi) = & \sum_{n,m} (a_{nm} r^n + b_{nm} \frac{1}{r^{n+1}}) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \\ & + \sum_{n,m} (c_{nm} r^n + d_{nm} \frac{1}{r^{n+1}}) P_n^m(\cos \theta) \sin(m\phi)\end{aligned}$$

◆其中 $P_n^m(\cos \theta)$ 为缔合勒让德(Legendre)函数;

◆式中 a_{nm} 、 b_{nm} 、 c_{nm} 、 d_{nm} 为任意常数, 由边界条件定出;

★若该问题中具有对称轴, 取此轴为极轴, 则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ , 这情形下通解为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta)$$

这是什么情况下的通解? 考虑圆锥、或者柱坐标下的尖劈时, $0 < \theta < \alpha < \pi$, 此时要求 l 为等于零或者大于零的实数, 并不要求是整数, 可以 (而且往往) 是非整数。

◆其中 $P_n(\cos \theta)$ 为勒让德函数;

◆式中 a_n 、 b_n 为任意常数, 由边界条件定出。

★所有的拉普拉斯方程都是一样的, 我们需要作的就是根据具体的边界条件确定出这些通解中所含的任意常数, 从而得到满足边界条件的特解。

§ 3.3 勒让德函数

★勒让德方程(取 $\zeta = \cos \theta$)

$$\frac{d}{d\zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{d\Theta}{d\zeta} \right] + n(n+1)\Theta = 0$$

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) \\ \dots\dots\dots$$

★ 罗德利格(Rodrigues)公式

其正交完备性不提

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [(\cos^2 \theta - 1)^n]$$

§ 3.4 例一

【问题】 电容率为 ε 的介质球置于均匀外电场 E_0 中, 求电势。

【解】 设介质球半径为 R_0 , 以球心为圆点, E_0 方向为极轴建立球坐标。
易知该问题具有轴对称性, 电势 φ 不依赖于方位角 ϕ 。

★ 设球外及球内区域的电势分别为 φ_1 及 φ_2 , 由于两区域内部都没有自由电荷, 因此电势均满足拉普拉斯方程。故其通解可写为:

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad (3)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_n (c_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad (4)$$

其中 a_n 、 b_n 、 c_n 、 d_n 分别为待定常数;

例一 (续一)

★ 边界条件有:

(1) 无穷远 $r \rightarrow \infty$ 处有 $E \rightarrow E_0$, 故:

为什么? 哪里的无穷远点? 如何选取电势零点?

$$\varphi_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

◆ 比较系数可知:

$$a_1 = -E_0, \quad a_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

◆ b_n 的系数待定;

(2) 在 $r = 0$ 处有: φ_2 有限, 故此 $d_n = 0$

由等势面的对称性可知其为零

(3) 在 $r = r_0$ 处有边值关系:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad (6)$$

例一（续二）

★将电势 φ_1 及 φ_2 的表达式3及4带入边值关系5可得:

$$a_1 r_0 P_1(\cos \theta) + \sum_n \frac{b_n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_n c_n r_0^n P_n(\cos \theta)$$

◆ 比较 P_0 项的参数

$$\frac{b_0}{r_0} = c_0 \quad (7)$$

◆ 比较 P_1 项的参数

$$a_1 r_0 + \frac{b_1}{r_0^2} = c_1 r_0 \quad (8)$$

◆ 比较 P_n 项($n > 1$)的参数

$$\frac{b_n}{r_0^{n+1}} = c_n r_0^n \Rightarrow b_n = r_0^{2n+1} \cdot c_n \quad (9)$$

例一（续三）

★将电势 φ_1 及 φ_2 的表达式3及4带入边值关系6可得:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \sum_n \left[n a_n r^{n-1} - (n+1) b_n \frac{1}{r^{n+2}} \right] P_n(\cos \theta)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \sum_n \left[n c_n r^{n-1} - (n+1) d_n \frac{1}{r^{n+2}} \right] P_n(\cos \theta)$$

$$a_1 P_1(\cos \theta) - \sum_n \frac{(n+1) b_n}{r_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_n n c_n r_0^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

例一（续四）

◆ 比较 P_0 项的参数

$$-\frac{b_0}{r_0^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot 0 \Rightarrow b_0 = 0 \quad (10)$$

◆ 比较 P_1 项的参数

$$a_1 - \frac{2b_1}{r_0^3} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} c_1 \quad (11)$$

◆ 比较 P_n 项($n > 1$)的参数

$$\frac{(n+1)b_n}{r_0^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} n c_n r_0^{n-1} \Rightarrow b_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{n}{n+1} r_0^{2n+1} \cdot c_n \quad (12)$$

例一（续五）

★由方程8及11

$$a_1 r_0 + \frac{b_1}{r_0^2} = c_1 r_0$$

$$a_1 - \frac{2b_1}{r_0^3} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} c_1$$

可解得:

$$b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r_0^3, \quad c_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$$

注意量纲

★由方程7、9、10及12可得:

$$b_n = c_n = 0, \quad n \neq 1$$

★由此所有常数均以定出，故可求得球外、球内的电势为:

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 r_0^3 \cos \theta}{r^2} \quad (13)$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta$$

例一（讨论）

★球内电场强度为:

$$\mathbf{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0$$

★由 $\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} < 1$ 可以看出: 球内电场比原外场 E_0 为弱; 这是由于介质球极化后束缚电荷激发的场与原外场反向, 使总电场减弱。

★在球内总电场作用下, 介质的极化强度为:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0$$

★介质球的总电偶极矩 \mathbf{p} 为:

$$\mathbf{p} = V \cdot \mathbf{P} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \mathbf{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)4\pi\varepsilon_0 r_0^3}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \mathbf{E}_0$$

为什么电四极矩为零? 以及高阶矩均为零? 因为是个介质球! 位型是球对称的!

★式13中的中的第二项正是这个电偶极矩所产生的电势:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{E_0 r_0^3 \cos \theta}{r^2}$$

§ 3.5 例二

【问题】 导体尖劈带电势 V ，分析它的尖角附近的电场。

后面的讨论略去：这道题并不适合讲解。

【解】 选择 Z 轴沿尖边的柱坐标系。设尖劈张开的角度为 α ，由于电势 φ 不依赖于 z ，柱坐标下的拉氏方程为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0$$

★用分离变量法求解此方程。设 φ 的特解为 $\varphi = R(r)\Theta(\theta)$ 则分解为两个方程：

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = \nu^2 R$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \nu^2 \Theta = 0$$

★其中 ν 为某些正实数或0。由此可得 φ 的通解：

$$\varphi = (A_0 + B_0 \ln r)(C_0 + D_0 \theta) + \sum_{\nu} (A_{\nu} r^{\nu} + B_{\nu} r^{-\nu})(C_{\nu} \cos \nu \theta + D_{\nu} \sin \nu \theta)$$

★各待定常量和 ν 的可能值都由边界条件确定。

例二（续一）

★在尖劈 $\theta = 0$ 面上， $\varphi = V$ ，与 r 无关，由此：

$$A_0 C_0 = V, \quad B_0 = 0$$

$$C_{\nu} = 0 \quad (\nu \neq 0)$$

◆因为 $r \rightarrow 0$ 时 φ 有限，得：

$$B_0 = B_{\nu} = 0$$

★在尖劈 $\theta = 2\pi - \alpha$ 面上，有 $\varphi = V$ ，与 r 无关，必须：

$$D_0 = 0$$

$$\sin \nu(2\pi - \alpha) = 0$$

◆因此 ν 的可能值为

$$\nu_n = \frac{n}{2 - \frac{\alpha}{\pi}}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

例二（续二）

★考虑这些条件， φ 可以重写成：

$$\varphi = V + \sum_n A_n r^{\nu_n} \sin \nu_n \theta \quad (14)$$

★为了确定待定常量 A ，还必须用某一大曲面包围着电场存在的区域，并给定这曲面上的边界条件。因此，本题所给的条件是**不完全**的，还不足以确定全空间的电场。但是，我们可以对尖角附近的电场作出一定的分析：

◆在尖角附近， $r \rightarrow 0$ ， φ 的公式14中主要贡献来自 r 最低幂次项，即 $n = 1$ 项。因此，

$$\varphi = V + A_1 r^{\nu_1} \sin \nu_1 \theta$$

例二（续三）

◆ 电场为

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1-1} \sin \nu_1 \theta$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx -\nu_1 A_1 r^{\nu_1-1} \cos \nu_1 \theta$$

◆ 尖劈两面上的电荷面密度为

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_\theta \quad (\theta = 0)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 E_\theta \quad (\theta = 2\pi - \alpha)$$

即

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n \approx -\varepsilon_0 \nu_1 A_1 r^{\nu_1-1}$$

★ 若 α 很小，有 $\nu_1 \approx \frac{1}{2}$ ，尖角附近的场强和电荷面密度都近似地正比与 $r^{-\frac{1}{2}}$ 。由此可见，尖角附近可能存在很强的电场和电荷面密度。相应的三维针尖问题就是尖端放电现象。

§ 3.6 小结

- ★ 拉普拉斯方程解决的是区域 V 内空间电荷为零的情况；
- ★ 拉普拉斯方程在柱坐标及球坐标下的通解均已得到；
- ★ 由具体的边界条件可确定出通解处的任意常数；
- ★ 由此得出满足边界条件的特解。

【习题】 Page 93: 2,3,6,7,8

第四节 镜象法

§ 4.1 镜象法求解静电边值问题

- ★ 求解对象：空间区域 V 内部有一个（或几个）点电荷，也可以是柱位型下无限长带电直导线；
- ★ 边界条件：要求有对称性很好的边界位型，如：无限大平板、球面、柱面等；且一般而言该边界为等势面；
- ★ 求解方法：将边界对场的影响用边界外部虚设的象电荷等效地替代；
- ★ 求解根据：唯一性定理——只要满足相同泊松方程以及边界条件，静电场就唯一确定；
 - ◆ 解题步骤一：根据等势面的形状粗估象电荷的个数及位置；
 - ◆ 解题步骤二：调整象电荷的位置和大小，使其产生的场和原电荷分布所产生的场叠加后满足问题给出的边界条件；

或者个人经验

◆ 解题步骤三：验证这种电场是否满足所有给出的边界条件！

- ★ 注意事项：象电荷放在边界的外部，它的存在并不改变原问题的电荷分布；

§ 4.2 例一

【问题】 接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q ，求空间中的电场。

★问题的求解略去；现【讨论】如下：

- ★ 本题中无限大导体平面是接地的；
- ★ 当题目改为无限大导体平面电势为不为零的常数时，如何求解？
- ◆ 电势零点在哪里？
- ◆ 无穷大导体平面电势不为零，与无穷远处电势为零是否矛盾？
- ◆ 从能量的观点而言， $E \neq 0$ 的区域无穷大，能量也无穷大；
- ◆ 结论是这个模型不对，不要求解；
- ◆ 这是一个简化模型，有其相应的简化条件：点电荷距导体平面的距离远小于导体面的尺寸；

- ★ 当考虑一般情况：半径为 R 的导体圆盘电势为 φ_0 ，附近有一点电荷 Q ，求空间中的电场。该问题可由格林函数法求解。

- ★ 用 $\mathbf{F}_s = -\mathbf{n} \cdot T = -\mathbf{n} \cdot \varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} E^2 \mathbf{I} - \mathbf{E} \mathbf{E} \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \mathbf{n} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma^2 \mathbf{n}$ 积分可求出导体面所收力：其大小同两个点电荷库仑力效果相同。

- ★ 应用：渡越辐射(transition radiation)在惯性约束等离子体中的应用；

超热电子跑出靶面相当于一个电偶极子；
其电偶极矩的二阶导数不为零（是个 δ 函数）；
就会发生电偶极辐射；
由辐射光的波长、脉宽、强度就可诊断出超热电子的信息：能量，产生其的物理过程等等；
书本上71页最后一行公式 $\varphi = \text{const}$ 令人不解；
为什么 $E \neq 0$ ？

§ 4.3 例二

【问题】 真空中有一半径为 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求空间各点的电势。

【解】 ★由等势面判断，镜象为一个点电荷，其位置在对称轴线上、导体球内部；

★设其电量为 Q' ，位置如图所示，距原点为 b ；由导体表面电势为零，得出相应的边界条件如下：

$$\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} = 0$$

◆上式也即为：对球面上的任意一点 P ，存在：

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \text{const}$$

◆这是一个球面方程

$$[x - x_0(b, Q')]^2 + y^2 + z^2 = R^2(b, Q')$$

例二（续一）

★方程中的两个未知数 b, Q' 由以下两个条件

$$x_0(b, Q') = 0$$

$$R(b, Q') = R_0$$

◆确定出镜象电荷的大小和位置:

$$b = \frac{R_0}{a} R_0$$

$$Q' = -\frac{R_0}{a} Q$$

★球外任一点的电势为:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} \right]$$

★易知: 其满足在导体面上的 $\varphi = 0$ 的边界条件: 故此它是空间电场的唯一正确的解。

例二（续二）

【讨论】

★ 用 $\oint_S \sigma dS = -\oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ 可以定出导体球所带总的感应电荷;

★ 不需积分即可得到 $-\oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -\frac{R_0}{a} Q = Q'$;

★ 导体球上的电荷是由接地点传至的;

★ 由于从 Q 发出的电场线只有一部分收敛于球面上, 剩下的部分伸展至无穷远, 故此可知 $|Q'| < Q$;

★ 假设源电荷在导体球壳内部, 可利用球外的镜象点电荷, 求解球内空间电势。

对于镜象电荷与导体球而言, 高斯面上电场强度相同: 其包围的电荷也相同。

§ 4.4 例三

【问题】真空中有一半径为 R_0 的不接地导体球, 且带电荷为 Q_0 , 距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q , 求电荷 Q 所受的力。

【解】本题与例二相仿, 不同之处在于边界条件为:

◆ 球面为等势面 (电势待定);

◆ 从球面发出的总电通量为 Q_0 。

★为了满足上述条件，设想在原来镜象电荷放置的基础上，再在 $R=0$ 处放置一镜象点电荷：这种方法的好处在于不改变等势面的形状！

★易知该镜象电荷的电量为：

$$Q'' = Q_0 - Q' = Q_0 + \frac{R_0}{a} Q$$

★故此球外电势为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{Q_0 + \frac{R_0}{a} Q}{R} \right]$$

★利用上式验证边界条件，易知满足所有边界条件。

例三（续）

★电荷 Q 所受的力相当于两个镜象电荷对其作用力：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QQ''}{a^2} + \frac{QQ'}{(a-b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QQ_0}{a^2} - \frac{Q^2 R_0^3 (2a^2 - R_0^2)}{a^3 (a^2 - R_0^2)^2} \right] \end{aligned}$$

【讨论】

- ★ 上式中第一项为两个点电荷的相互作用，可正可负；
- ★ 第二项为吸引力，当 $a \rightarrow R_0$ 时吸引力越大，可以大于第一项；
- ★ 金属导体中电子脱离导体要做功，相当部分是为了克服该镜象力；

导体球可看作无限大平板

§ 4.5 例四

【问题】真空中有一半径为 R_0 的不接地导体球，且不带电荷，距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求空间各点的电势。

【解】本题与例二、例三相仿，不同之处在于边界条件为：

- ◆ 球面为等势面（电势待定）；
- ◆ 从球面发出的总电通量为0。

★由例三可知，可用两个镜象点电荷模拟，其中在 $R=0$ 处镜象点电荷有：

$$Q'' = -Q' = \frac{R_0}{a} Q$$

★故此球外电势为：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{R_0 Q}{aR} \right]$$

★易知，在 $R = R_0$ 处，也即球壳表面电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- ★当导体半径为无穷大时， $a > R_0$ 也是无穷大，也即球壳电势为零；
- ★这就证明了无穷远点与大地的电势相同。

§ 4.6 边界条件小结

★从空间部分划分:

- ◆ $r = 0$ 处
- ◆ $r = \infty$ 处
- ◆ 有限界面 $r = r_0$ 处

★从介质种类方面划分:

- ◆ 绝缘介质界面 (不含自由电荷):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 &= \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2\end{aligned}$$

边界条件小结 (续)

★对于导体:

- ◆ 或者给出导体表面电势: (电势给定)

$$\varphi = \varphi_0$$

- ◆ 或者给出导体所带电荷: (电势待定)

$$\begin{aligned}\varphi &= const \\ - \oint \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS &= Q\end{aligned}$$

- ◆ 用另一边条件求出导体表面自由电荷面密度

$$\sigma = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

§ 4.7 小结

- ★ 求解对象: 空间区域 V 内部有一个 (或几个) 点电荷, 也可以是柱位型下无限长带电直导线;
- ★ 边界条件: 要求有对称性很好的边界位型, 如: 无限大平板、球面、柱面等; 且一般而言该边界为等势面;
- ★ 求解方法: 将边界对场的影响用边界外部虚设的象电荷等效地替代;
- ★ 求解根据: 唯一性定理——只要满足相同泊松方程以及边界条件, 静电场就唯一确定;
 - ◆ 解题步骤一: 根据等势面的形状粗估象电荷的个数及位置;
 - ◆ 解题步骤二: 调整象电荷的位置和大小, 使其产生的场和原电荷分布所产生的场叠加后满足问题给出的边界条件;
 - ◆ 解题步骤三: 验证这种电场是否满足所有给出的边界条件!
- ★ 注意事项: 象电荷放在边界的外部, 它的存在并不改变原问题的电荷分布;

或者个人经验

【习题】 Page 95: 9,10,11,12,13

第五节 格林(Green)函数

从镜像法扩展到格林函数

§ 5.1 δ 函数的性质

★点电荷的电荷密度分布可以用 δ 函数来描述：处于 \mathbf{x}' 点上的单位点电荷密度

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \iiint_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dv &= 1, \quad \mathbf{x}' \in V \\ \delta(\mathbf{x}) &= \delta(-\mathbf{x}), \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r')\delta(\phi - \phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\end{aligned}$$

§ 5.2 格林函数的定义

【定义】一个处于 \mathbf{x}' 点上的单位点电荷所激发的电势 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 满足泊松方程：

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (15)$$

★设在包含 \mathbf{x}' 点的某空间区域 V ，在 V 的边界 S 上有边界条件

$$G|_S = 0 \quad (16)$$

则15式的满足边界条件16式的解称为泊松方程在区域 V 的**第一类边值问题**的**格林函数**。

★若在 S 上有另一边界条件：

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \quad (17)$$

(n 为 S 的法线)，则15式的满足边界条件17式的解称为泊松方程在区域 V 的**第二类边值问题**的**格林函数**。

★其中 \mathbf{x}' 代表源点，即点电荷所在点， \mathbf{x} 代表场点， ∇^2 是对场点 \mathbf{x} 求微分。

选择 $G|_S = 0$ 的用途在于叠加

$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ 格林函数的对称性：电势的倒易性

§ 5.3 特定区域的格林函数例子

★无界空间的格林函数

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\end{aligned}$$

格林函数是很难找的，对一维二维问题也可采用本征函数展开、保角变换等方法求得；

★上半空间的格林函数

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

特定区域的格林函数例子（续）

★球外空间的格林函数

◆ \mathbf{x}' 点为点电荷的位置，镜像点电荷的位置在 $\frac{R_0^2}{R'} \frac{\mathbf{x}'}{R'}$ ，带电量为 $-\frac{R_0}{R'}$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha}$$

$$r' = \left| \mathbf{x} - \frac{R_0^2}{R'^2} \mathbf{x}' \right| = \frac{1}{R'} \sqrt{R^2 R'^2 + R_0^4 - 2R_0^2 R R' \cos \alpha}$$

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{R_0}{R' r'} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{RR'}{R_0})^2 + R_0^2 - 2RR' \cos \alpha}} \right]$$

§ 5.4 格林公式

★区域V内的两个函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 和 $\psi(\mathbf{x})$ 满足如下格林公式：

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

【证明】

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) = \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi \quad (18)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi \quad (19)$$

★由18式减去19式可得：

$$\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi)$$

★对上式两端进行体积分可得：

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

§ 5.5 由格林公式求解第一类边值问题

★对格林公式中的 φ ，取其满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

★取 ψ 为格林函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ，它满足 $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。

★为方便起见，将格林公式中的积分变量 \mathbf{x} 改为 \mathbf{x}' ，格林函数中的 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}' 互换，可得：

$$\begin{aligned} & \iiint_V [G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \nabla'^2 \varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G(\mathbf{x}', \mathbf{x})] dV' \\ &= \iiint_V \left[-G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\varepsilon_0} + \varphi(\mathbf{x}') \frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \right] dV' \\ &= \oint_S \left[G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS' \end{aligned}$$

由格林公式求解第一类边值问题（续）

★于是可得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \iiint_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' + \varepsilon_0 \oint_S \left[G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right. \\ &\quad \left. - \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right] dS' \end{aligned}$$

★在第一类边值问题中，格林函数满足边界条件：

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x})|_{\mathbf{x}' \in S} = 0$$

【结论】只要知道格林函数 $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ ，以及给定边界上的 $\varphi|_S$ ，即可求出该第一类边值问题的电势 $\varphi(\mathbf{x})$ ：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \iiint_V G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') dV' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dS' \quad (20)$$

第二类边值问题没有什么实际意义，也找不到格林函数，略去不讲

§ 5.6 对格林函数法的讨论

★格林函数法的实质就是通过格林公式，把静电边值问题转化为求解相应的格林函数的问题；

★从表面上来看：格林函数所满足的方程和边界条件较原静电问题简单，但其实求解格林函数本身并不容易；

★格林函数法也可以用来解拉普拉斯方程的边值问题($\rho(\mathbf{x}') = 0$)；

★格林函数法的物理意义：

- ◆ 第一项：满足特定边界条件的各空间点电荷的电势叠加；
- ◆ 第二项：各边界上仅有的电势不为零的面元，在空间产生的电场的叠加；

§ 5.7 例

【问题】在无穷大导体平面上有半径为 a 的圆，圆内和圆外用极狭窄的绝缘环绝缘。设圆内电势为 V_0 ，导体板其余部分电势为0，求上半空间的电势。

【解】上半空间的格林函数用柱坐标来表示：

★场点 \mathbf{x} 坐标为 $(R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ ；源点 \mathbf{x}' 坐标为 $(R' \cos \phi', R' \sin \phi', z')$ ；镜像点 \mathbf{x}'' 坐标为 $(R' \cos \phi', R' \sin \phi', -z')$ 。

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right]$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}$$

$$r' = |\mathbf{x} - \mathbf{x}''| = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') + (z + z')^2}$$

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') + (z + z')^2}} \right]$$

例（续一）

★由格林公式可知上半空间电势为：

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 \oint_S \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) dS'$$

★由于法线沿 $-z'$ 方向，格林函数的法向导数为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n'} &= - \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{[R^2 + R'^2 + z^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} \end{aligned}$$

★由于 S 上只有圆内部分电势不为零，故此

$$\begin{aligned} & -\epsilon_0 \int \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} dS' \\ &= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

例（续二）

★当 $R^2 + z^2 \gg a^2$ 时，可以把被积函数展开，得：

$$\varphi(x) = \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(R^2 + z^2)} + \frac{15R^2 a^2}{8(R^2 + z^2)^2} + \cdots \right]$$

★当取 $\frac{a^2}{R^2 + z^2}$ 的一级小量时，可得：

$$\varphi(x) \approx \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{r^3} \Longleftrightarrow \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

★也即相当于一个电偶极子产生的电场。

§ 5.8 小结

- ★ 格林函数为一类满足特殊泊松方程($\delta(\mathbf{x})$)以及边界条件的函数;
- ★ 用镜像法可知三种特定区域的格林函数例子;
- ★ 通过格林公式, 用格林函数法可以求解静电场的第一类边值问题;
- ★ 格林函数法也可以用来解拉普拉斯方程的边值问题。

【习题】 Page 96: 18,19

第六节 电多极矩

§ 6.1 电的多极展开

★ 无界空间中, 边界条件为 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$, 电荷分布为 $\rho(\mathbf{x}')$, 求空间中的电势。

$$\varphi(\mathbf{x}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0 r} dV' \quad (21)$$

其中体积分遍及整个电荷分布区域, r 为源点 \mathbf{x}' 到场点 \mathbf{x} 的距离。

★ 我们考虑的场点距离源电荷很远时的情况, 也即: 当 $r \gg \mathbf{x}'$ 时, 可以对(21)式进行泰勒展开:

★ 从《高等数学导论》摘抄的二元函数泰勒公式:

这也是最常遇到的实际情况

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x, y) \Big|_{y=y_0}^{x=x_0} \quad (22)$$

设 $r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\frac{1}{r}$ 为:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

电的多极展开 (续一)

★ 故此用(22)式对 $\frac{1}{r}$ 在 \mathbf{x} 点处展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(-x' \frac{\partial}{\partial x} - y' \frac{\partial}{\partial y} - z' \frac{\partial}{\partial z} \right)^m \frac{1}{r} \Big|_{r=r_0} \\ &= \frac{1}{r_0} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2!} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r_0} + \dots \\ &= \frac{1}{r_0} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

★ 将表达式(23)带入式(21), 即可得到远处的电势为:

就是为了凑出多极矩展开的形式; 后面求电荷分布在外电场中的能量时, 不对 $\rho(\mathbf{x})$ 做展开, 是同样的道理。

$$\varphi(\mathbf{x}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_0} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} + \cdots \right] dV' \quad (24)$$

【讨论】为什么仅对分母 $\frac{1}{r}$ 展开？其实最一般的展开应该是对整个 $\frac{\rho(\mathbf{x}')}{r(\mathbf{x}')}$ 展开，为什么不对 $\rho(\mathbf{x}')$ 展开？

电的多极展开（续二）

★把带 \mathbf{x} 的量提到积分号外边，并令

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'$$

$$\mathbf{p} = \iiint_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV'$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \iiint_V 3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \quad , \quad D_{ij} = \iiint_V 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') dV'$$

则式(24)可写为：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r_0} - \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} + \cdots \right] \quad (25)$$

其中 \mathbf{p} 为体系的电偶极矩，张量 $\overleftrightarrow{\mathcal{D}}$ 为体系的电四极矩。

★电四极矩在远处产生的电势 $\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{r_0}$

§ 6.2 电多极矩

★展开式(25)中的各项，其物理意义即为：空间中的电荷体系，在远处激发的电势，就等于该电荷体系的各项电多极矩，在远处产生的电势之和。

★电荷密度分布的零阶矩

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{x}') dV'$$

★第一项为：把整个电荷体系看作集中在原点上的点电荷，由它激发的电势；其电势与 r_0 成反比。

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0}$$

★第二项 $\varphi^{(1)}$ 、第三项 $\varphi^{(2)}$ 分别为电偶极矩、电四极矩产生的电势：

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r_0}$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{r_0}$$

§ 6.3 电偶极矩

★电荷密度分布的一阶矩：电偶极矩

$$\mathbf{p} = \iiint_V \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV'$$

★电偶极矩激发的电势与 r_0^2 成反比：

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^3}$$

★如果一个体系的电荷分布对原点对称，它的电偶极矩为零。

★总电荷为零、电偶极矩不为零的例子：电偶极子

$$\mathbf{p} = \iiint_V \mathbf{x}' [Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_+) - Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_-)] dV' = Q(\mathbf{x}'_+ - \mathbf{x}'_-) = Q\mathbf{l}$$

源点怎么选？物理上为简单起见，做出这种积分决定！

带电体系电偶极矩产生的电势，与电偶极子产生的电势相类似；

电偶极矩（续）

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_-|} \right) \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0 - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}_+} - \frac{1}{r_0 - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{x}_-} \right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{l}}{r_0^2} \\ \varphi &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r_0^2} = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r_0^3} = -\frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_0} \end{aligned}$$

注意到此时由点电荷产生的电势 $\frac{1}{r}$ 的项相互抵消了，剩下的是 $\frac{1}{r^2}$ 项

◆故此，有

$$\varphi \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (p_z \frac{\partial}{\partial z}) \frac{1}{r_0}$$

◆也即：电偶极子在远处产生的电势即为其电偶极矩产生的电势。

近处的电势未必相等

§ 6.4 电四极矩

★电荷密度分布的二阶矩：电四极矩

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \iiint_V 3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') dV' \quad , \quad D_{ij} = \iiint_V 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') dV'$$

★电四极矩激发的电势与 r_0^3 成反比：

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{r_0}$$

★与电偶极矩的讨论相类似，为了凸现出电四极矩，最好使得点电荷产生的电势 $\frac{1}{r}$ 的项、电偶极矩产生的电势 $\frac{1}{r^2}$ 的项相互抵消：

★如图所示的例子中，零阶矩、电偶极矩均为零，电四极矩不为零：

$$\begin{aligned} D_{33} &= \iiint_V 3z' z' \rho(\mathbf{x}') dV' \\ &= \iiint_V 3z' z' [Q\delta(z-b) + Q\delta(z+b) - Q\delta(z-a) - Q\delta(z+a)] dV' \end{aligned}$$

电四极矩（续）

$$D_{33} = 6Q(b^2 - a^2) = 6Q(b - a)(b + a) = 6pl$$

★这种电四极矩产生的电势，就是一对反向电偶极子的电势：

$$\begin{aligned}\varphi &\approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_-} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\left(-l\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_0}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}pl\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}D_{33}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{r_0}\end{aligned}$$

★也即：符合电四极矩产生的电势。

★上述电四极矩为：方向沿 z 轴的等量异号电偶极子，在 z 轴的不均匀性引起的电四极矩。

★同理，具有 D_{11} 分量的最简单的电荷体系由 x 轴上两对正负电荷组成，具有 D_{22} 分量的体系由 y 轴上两对正负电荷组成；具有 D_{12} 分量的电荷体系由 xy 平面上两对正负电荷组成，其余类推。

§ 6.5 将电四极矩化为无迹对称张量

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \iiint_V 3\mathbf{x}'\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')dV' \quad , \quad D_{ij} = \iiint_V 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')dV'$$

★由对称性易知电四极矩是对称张量；

★下面我们将电四极矩转化为无迹对称张量：

$$\nabla^2 \frac{1}{r_0} = 0 \quad , \quad r_0 \neq 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\right)\frac{1}{r_0} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} = 0$$

上式两端各乘以 $\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\iiint r'^2 \rho(\mathbf{x}')dV'$ ，并加入电四极矩产生的电势：

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\left[\iiint 3x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}')dV'\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\left[\iiint (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')dV'\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0}\end{aligned}$$

将电四极矩化为无迹对称张量（续）

★重新定义电四极矩张量如下：

$$D_{ij} = \iiint (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')dV'$$

由前讨论易知：用新的电四极矩定义，并不改变其产生的势：

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0}$$

同时，这种新的电四极矩张量满足迹为零：

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 3x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 - 3r'^2 = 0$$

★也即此时的电四极矩为无迹对称张量，其并矢形式为：

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \iiint (3\mathbf{x}'\mathbf{x}' - r'^2 \overleftrightarrow{\mathcal{D}}) \rho(\mathbf{x}') dV'$$

★电荷分布偏离球对称性，一般就会出现电四极矩：电四极矩的出现标志着对球对称性的偏离！

★八极矩以及更高极矩较少用到，不加讨论。

§ 6.6 电荷体系在外电场中的能量

★具有电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 的体系在外电场 $\varphi_e(\mathbf{x})$ 中的能量为：

$$W = \iiint \rho \varphi_e dV \quad (26)$$

★设电荷分布于小区域，取区域内适当点为坐标原点，对 $\varphi_e(\mathbf{x})$ 进行展开：

$$\varphi_e(\mathbf{x}) = \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \varphi_e(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi_e(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots \quad (27)$$

不对 $\rho(\mathbf{x})$ 展开就是为了凑出多极矩的形式

将式(27)带入式(26)可得：

$$W = Q\varphi_e(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \varphi_e(0) + \cdots$$

其中 Q 、 \mathbf{p} 、 $\overleftrightarrow{\mathcal{D}}$ 分别为总电量、电偶极矩与电四极矩。

电荷体系在外电场中的能量（续一）

★第一项是设想体系的电荷集中于原点上时在外场中的能量：

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0)$$

★第二项是体系的电偶极矩在外电场中的能量：

$$W^{(1)} = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0)$$

负号是因为偶极子方向的定义与电场方向相反：有扭偶极子的趋势

◆电偶极子在外场中受的力：

$$\mathbf{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_e) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_e = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_e$$

当 \mathbf{E}_e 均匀时受力为零；此处的 ∇ 是对场点作用，故 \mathbf{p} 为常数

◆电偶极子在外场中的力矩：

$$L_\theta = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (p E_e \cos \theta) = -p E_e \sin \theta$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_e$$

电荷体系在外电场中的能量（续二）

★第三项是体系的电四极矩在外电场中的能量：

$$W^{(2)} = \frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \varphi_e(0) = -\frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \mathbf{E}_e(0)$$

★只有在非均匀场中电四极矩的能量才不为零！

§ 6.7 关于电多极矩的讨论

- ★这一节是本门课的重点；
- ★电多极矩展开是求解静电场的一种方法；
- ★解决各种物理问题的过程中，多次用到多极矩的概念：磁多极矩、平均速度、温度、伏拉索夫方程到流体描述…；
- ★多极矩展开的方法首先是体会到了描述事物由简到繁这一最本质的思想，并由此总结、推广，成为了一种在各个领域都较为通用的认识事物的手段；
- ★尽管引入电多极矩时利用了级数展开，但电多极矩展开是并不依赖于泰勒展开的另一种展开方式；
- ★最本质的根源在于叠加原理；
- ★实验上检测 $\frac{1}{R^n}$ 项就可知道 n 阶矩；

什么样的静电场？

同样是智慧，与镜像法的精巧不同，多极矩展开有大智若愚的感觉

§ 6.8 小结

- ★空间中的带电体系，可以按其电荷密度做出多极矩展开；
- ★空间中的电荷体系，在远处激发的电势，就等于该电荷体系的各项电多极矩，在远处产生的电势之和；
- ★电荷密度分布的零阶矩，是把整个电荷体系看作集中在原点上的点电荷：由它激发的电势与 r_0 成反比；
- ★一个体系的电偶极矩的出现，表示电荷分布对原点对称性的偏离：激发的电势与 r_0^2 成反比；
- ★电四极矩的出现标志着对球对称性的偏离，：激发的电势与 r_0^3 成反比；
- ★电荷体系在外场中的能量同样可以用多极矩展开的方法讨论；
- ★总电荷、电偶极矩、电四极矩在外电场中的能量分别如下： $Q\varphi_e(0)$ 、 $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0)$ 、 $-\frac{1}{6} \overleftrightarrow{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \mathbf{E}_e(0)$ 。

【习题】 Page 96: 4,5,16