

第三章 静磁场

内 容 提 要

1 静磁场的矢势	1
2 静磁标势	5
3 磁多极矩	9
4 阿哈罗诺夫-玻姆(Aharonov-Bohm)效应	14
5 超导体的电磁性质	15

本章的学习方法：比较静电场和静磁场的异同

静电场和静磁场的差别：
没有自由磁荷存在，基本单元为磁偶极子；

尽管导体内部存在纵向电场，由导体表面带电导致横向电场，但由于恒定情况下，电磁场不发生直接联系，可以分开求解。

第一节 静磁场的矢势

§ 1.1 静磁场矢势的引入

★描述恒定电流磁场的基本方程：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

★由静电场的无旋性引入静电标势 \Rightarrow 静磁场的无源性引入矢势

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

★ \mathbf{A} 称为磁场的矢势。

§ 1.2 矢势 \mathbf{A} 的物理意义

【意义】沿任一闭合回路 \mathbf{A} 的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量。

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

只有环量才有物理意义

★正是由于 \mathbf{B} 的无源性，决定了 \mathbf{A} 环量的唯一性。

附图：不同曲面上 \mathbf{B} 的面积分相同。与静电场 \mathbf{E} 的线积分相似。

§ 1.3 矢势 \mathbf{A} 的不确定性

【举例】沿 z 轴方向的均匀磁场可以用多个 \mathbf{A} 来描述:

只有横向, 没有纵向分量, 当然不确定

$$\begin{aligned} B_x = B_y = 0, \quad B_z = B_0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ A_y = A_z = 0, \quad A_x = -B_0 y \end{aligned}$$

也可以是:

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = B_0 x$$

★事实上 $\mathbf{A} + \nabla\psi$ 与 \mathbf{A} 对应着同一个 \mathbf{B} : $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A}$

★这种任意性决定了只有 \mathbf{A} 的环量才有意义, \mathbf{A} 本身无直接意义

★库伦规范条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

可不可以加这个条件?

§ 1.4 库伦规范条件存在性

【求证】总可以找到一个 \mathbf{A} , 既满足 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 又满足库伦规范条件。

【证明】设某一解 \mathbf{A} 符合 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 但不满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = u \neq 0$$

设 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, 故:

让方程右端为零

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi = u + \nabla^2\psi$$

取 ψ 为如下泊松方程的解

$$\nabla^2\psi = -u$$

并带回到 \mathbf{A}' 的表达式, 得到 \mathbf{A}' 的满足库伦规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ 。

确定了 \mathbf{A} , 就可以用矢势方程描述静磁场

§ 1.5 矢势的微分方程

★在均匀线性介质中有 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, 联立 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 以及 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 可得:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu\mathbf{J} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \\ (\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0) \\ \nabla^2\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} \\ \nabla^2 A_i &= -\mu J_i, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

★对比静电势的方程 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV'$$

★由于在第一章中已经证明过 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 故此上式确为矢势方程的解。

矢势的微分方程（续）

由给出的 \mathbf{A} 的表达式，可以求出 \mathbf{B} 为：

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV' \right] \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} dV'\end{aligned}$$

★也就是毕奥—萨伐尔定律。

上述给出的是无界空间的解

§ 1.6 矢势的边值关系

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f$$

★对于非铁磁介质 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$ ，矢势的边值关系为：

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_2 - \nabla \times \mathbf{A}_1) = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \boldsymbol{\alpha}_f$$

★当 $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$ 时，式(1)可以简化为：

$$A_{2t} = A_{1t}$$

★即 \mathbf{A} 的切向分量连续。

这是一个重要条件。反例：螺线管

书上关于 \mathbf{A}_n 的讨论不合适

§ 1.7 静磁场的能量

★各向同性线性介质中电磁场能量密度： $\omega = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$

★磁场的总能量：

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$$

★用矢势和电流来表示总能量：

与静电能比较
自能？互能？

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \iiint \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \iiint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] dV \\ &= \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV\end{aligned} \quad (2)$$

§ 1.8 静磁场能量的讨论

- ★ 公式(2)仅是在静磁场下才成立;
- ★ 电磁场的能量是分布在场中的, $\frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ 决不是能量密度;
- ★ 用能量密度可以计算某区域内的电磁场能量, $\frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ 仅在求总能量时有意义。
- ★ 在式(2)中, 矢势 \mathbf{A} 是由电流分布 \mathbf{J} 本身激发的。

§ 1.9 电流在外磁场中的能量

【已知】 某电流分布 \mathbf{J} 在给定外磁场中, 外磁场的矢势为 \mathbf{A}_e , 产生该外磁场的电流分布为 \mathbf{J}_e ;

【求解】 电流在外磁场中的相互作用能。

【解】 总电流分布为 $\mathbf{J} + \mathbf{J}_e$, 总磁场矢势为 $\mathbf{A} + \mathbf{A}_e$, 故磁场的总能量为:

$$W = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{A} + \mathbf{A}_e) \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_e) dV$$

★ 电流分布 \mathbf{J}_e 及 \mathbf{J} 产生磁场的自能分别为:

$$W_1 = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{J}_e dV, \quad W_2 = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$$

★ 故相互作用能为

$$W_i = W - W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_e + \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{J}) dV$$

电流在外磁场中的能量 (续)

★ 由于:

书上P104公式?

$$\mathbf{A}_e = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}_e(\mathbf{x}')}{r} dV', \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV'$$

故此:

$$\frac{1}{2} \iiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_e) dV = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{J}) dV$$

★ 所以可得电流 \mathbf{J} 在外磁场中的相互作用能:

注意与静电能比较

$$W_i = \iiint \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{J} dV$$

§ 1.10 例一

【问题】 无穷长直导线载电流 I , 求磁场的矢势和磁感应强度。

【解】 书上用 $\mathbf{A}(x) = \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV'$ 积分求解, 略去不讲;

【讨论】

★ 用量纲分析的方法看此题:

◆ 静电场: $\mathbf{E} \propto \frac{1}{r^2} \leftrightarrow \varphi \propto \frac{1}{r}$ $\mathbf{E} \propto \frac{1}{r} \leftrightarrow \varphi \propto \ln r$

◆ 静磁场: $\mathbf{B} \propto \frac{1}{r} \leftrightarrow \mathbf{A} \propto \ln r$

★ 注意公式 $\mathbf{A} = -\left(\frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r}{R_0}\right) \mathbf{e}_z$ 中, 当 $r \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{A} \rightarrow \infty$

不存在无限长的导线

★ 由 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 与 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ 方程的相似性: 安培环路定理

(螺线管、长导线)、(均匀磁场、均匀电流)

★ 两个常用公式: $\nabla \times \left(\frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\right) = 0 \quad (r \neq 0), \quad \nabla \times (r\mathbf{e}_\theta) = 2\mathbf{e}_z$

§ 1.11 例二

【问题】半径为 a 的导线圆环载电流 I , 求矢势和磁感应强度。

【解】书上用 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{r} I d\mathbf{l}$ 积分求解, 略去不讲;

【讨论】

★ 当 $2ra \sin \theta \ll r^2 + a^2$ 时, 矢势 \mathbf{A} 为:

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a}{4} \left[\frac{ra \sin \theta}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{15}{8} \frac{r^3 a^3 \sin^3 \theta}{(r^2 + a^2)^{7/2}} \right] \mathbf{e}_\phi$$

在远场条件下 ($r \gg a$) 取第一项:

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (3)$$

★ 上式(3)相当于磁偶极子产生的矢势;

★ 本题与P82静电场例题有许多相似之处。

§ 1.12 小结

★ 由静磁场的无源性可引入矢势 \mathbf{A} 来描述磁场: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$;

★ \mathbf{A} 本身没有物理意义, 但 \mathbf{A} 的环量代表通过以该回路为界的任一曲面的磁通量;

★ 可以引入库仑规范条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 来确定矢势 \mathbf{A} ;

★ 利用矢势的微分方程以及相应边界条件可以唯一求解静磁场问题;

★ 静磁场的总能量为: $W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$;

★ 电流在外磁场中的相互作用能: $W_i = \iiint \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{J} dV$ 。

【习题】Page 131: 1,2,3,4,7

第二节 静磁标势

§ 2.1 磁标势的引入

★ 磁场的矢势 \mathbf{A} 是一矢量, 求解过程一般比较复杂;

★ 当空间中不存在自由电流时, 静磁场方程转化为: $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 与无源的静电场方程相似;

★ 在实际问题中会经常遇到具有上述特征的磁场：如铁磁介质产生的磁场、电磁铁间隙处的磁场。

★ 回顾静电势的引入：保守力场，积分的路径无关性；

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{or} \quad \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

★ 但一般而言：

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

★ 考虑如何选取适当的条件，解决该矛盾。

§ 2.2 关于环量积分的讨论

★ 对于任一点 $\mathbf{x} \in L$ 有 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$ ，则 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$

★ 对于任一点 $\mathbf{x} \in L$ 有 $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$ ，未必 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$

★ 事实上应该为：对于任一点 $\mathbf{x} \in S$ 有 $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$ ，则 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$

★ 举例：无限长直导线： \mathbf{H} 的旋度仅在 $r = 0$ 点不为零，但任一绕原点的闭合曲线环量不为零；

★ 这也就是说： $\nabla \times \mathbf{H}$ 是局域的，仅和当地 \mathbf{J} 有关；但 \mathbf{H} 并不是局域的；

★ 同理： $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 是局域的，仅和当地 ρ 有关；但 \mathbf{E} 并不是局域的： $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$

★ 同理： $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = 0$ ($r \neq 0$)，但： $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$

洛伦兹力和局域的 \mathbf{B} 有关
A-B效应

§ 2.3 引入磁标势的条件

★ 为了满足下述条件：

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

★ 利用挖去空间的办法，使得剩下的空间 V 中任何 L 都不链环电流。也即：

1 所考察的空间区域里没有传导电流： $\nabla \times \mathbf{H} = 0$

2 空间应为单联通区域

【定义】对于空间区域 V 内任何一条闭路，都存在一张以此闭路为全部边界且完全含在 V 内的有界的简单曲面 S ，则称 V 为曲面单联通区域，否则称为曲面多联通区域。

★ 通常的挖走方法是去除一个以线圈为边界（含线圈）的磁壳。

画图！
挖走的是空间，不是电流。否则方程就不对了！

磁壳的选择有任意性

§ 2.4 铁磁介质的磁标势方程

★磁标势法的重要应用之一就是求解磁铁的磁场。其不再满足 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ， \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 不再是单值函数。

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = f(\mathbf{H}) \quad (5)$$

将(5)式带入(4)式可得:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

★将分子电流看作由一对假想磁荷组成的磁偶极子，与 $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_p$ 对应，假想磁荷分布为：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$$

铁磁介质的磁标势方程（续）

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

★其与静电场微分方程差别仅在于没有自由磁荷：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

★由此，静电场的求解方法均可以用到静磁场上，引入磁标势 φ_m

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$$

★在方程的形式上 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 相对应。

物理地位上 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 对应，
但形式上 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 更对应

§ 2.5 磁标势公式与静电场公式的对比

静电场

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

静磁场

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

§ 2.6 例一

【证明】 $\mu \rightarrow \infty$ 的磁性物质表面为等磁势面。

与 \mathbf{H} 处处垂直的面

【证】 以角标1代表磁性物质，2代表真空，由磁场边界条件

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$$

★ 由于 $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$, 故可得:

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}$$

设 \mathbf{H} 与界面法线 \mathbf{n} 的夹角为 θ , 故

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

★ 因为 $\mu_1 \rightarrow \infty$, 故此可得 $\theta_2 \rightarrow 0$: 也即 \mathbf{H}_2 与表面垂直: 表面为等磁势面。

§ 2.7 几种特殊的电磁介质

- ★ 导体: $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\varepsilon = \frac{D}{E}$, $\mathbf{E} \rightarrow 0$
- ★ 软铁磁材料: $\mu \rightarrow \infty$, $\mu = \frac{B}{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow 0$
- ★ 超导体: $\mu \rightarrow 0$, $\mathbf{B} \rightarrow 0$
- ★ 导体: $\sigma \rightarrow \infty$, $\sigma = \frac{J}{E}$, $\mathbf{E} \rightarrow 0$
- ★ 绝缘体: $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma = \frac{J}{E}$, $\mathbf{J} \rightarrow 0$
- ★ 什么材料: $\varepsilon \rightarrow 0$?

§ 2.8 小结

- ★ 当空间中不存在自由电流时, 静磁场方程与静电场方程相似, 适合引入磁标势;
- ★ 利用挖去空间的办法, 引入磁标势;
- ★ 挖去空间满足条件:
 - ◆ 所考察的空间区域里没有传导电流: $\nabla \times \mathbf{H} = 0$;
 - ◆ 空间应为单联通区域: 通常的挖走方法是去除一个以线圈为边界(含线圈)的磁壳;
- ★ 磁标势方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{\rho_m}{\mu_0}, & \nabla \times \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{H} &= -\nabla \varphi_m, & \rho_m &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \end{aligned}$$

【习题】 Page 133: 8,9,11

第三节 磁多极矩

§ 3.1 磁矢势的多极展开

★无界空间中，电流分布为 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ ，空间中的磁场矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{r} dV' \quad (6)$$

★当场点距离电流分布区域很远时 ($r \gg x'$)，可对(6)式做多极矩展开：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r_0} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r_0} + \cdots \right] dV' \quad (7)$$

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' = 0$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3}$$

$$\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \mathbf{x}' : \nabla \nabla \frac{1}{r_0} dV'$$

§ 3.2 磁零极矩形成矢势为零

★稳恒电流构成闭合回路， $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 是无源有旋的，且流出边界的电流为零：

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}') = (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' + (\mathbf{J} \cdot \nabla') \mathbf{x}' = \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \iiint \nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \oint d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{J} \mathbf{x}' \\ &= 0 \end{aligned}$$

★磁单极不存在，因此对应点电荷的项为零；

§ 3.3 磁偶极矩矢势的计算

★第二项可由 $\mathbf{f} \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}$ 改写为 $\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}$ 形式：

$$\mathbf{f} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_0) = (\mathbf{g} \times \mathbf{f}) \times \mathbf{r}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}_0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r_0} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3} \sum_i r_{0i} \iiint \mathbf{J} x'_i dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3} \sum_i r_{0i} \iiint \left[\frac{1}{2} (\mathbf{J} x'_i + J_i \mathbf{x}') + \frac{1}{2} (\mathbf{J} x'_i - J_i \mathbf{x}') \right] dV' \end{aligned}$$

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}'_i) = \mathbf{x}'_i \nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{x}') + \nabla' \mathbf{x}'_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_i \mathbf{J} + (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{J}) \mathbf{x}' = \mathbf{J} \mathbf{x}'_i + J_i \mathbf{x}'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0^3} \sum_i r_{0i} \iiint \left[\frac{1}{2} (\mathbf{J} \mathbf{x}'_i - J_i \mathbf{x}') \right] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi r_0^3} \iiint [\mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{x}'(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_0)] dV' \end{aligned}$$

磁偶极矩矢势的计算（续）

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{8\pi r_0^3} \iiint (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}_0 dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) dV' \times \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$$

★ \mathbf{m} 称之为电流体系的磁矩。(8)式即为磁偶极矩产生的矢势。

★ 对于闭合线圈内的电流分布，磁矩中体积分转化为线积分：

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{x}' \times I d\mathbf{l} = I \mathbf{S}$$

★ 其中用到： $\oint \frac{1}{2} \mathbf{x}' \times d\mathbf{l} = \oint \delta \mathbf{S} = \mathbf{S}$

量纲与 r_0^2 成反比

§ 3.4 电流线圈的磁偶极矩

【证明】 对于某个电流线圈，可以选择不同曲面但拥有相同边界，证明其磁偶极矩为不变量。

【证】 一个任意电流线圈可以看作由它所围的一个曲面 S 上许多小电流线圈组合而成，因此它的总磁偶极矩为

$$\mathbf{m} = I \iint_S d\mathbf{S}$$

★ 尽管以电流线圈为边界的曲面 S 并不唯一，但由高斯定理：

$$\iiint \nabla \psi dV = \oint d\mathbf{S} \psi$$

◆ 取 $\psi = 1$ 可得：

$$\iint_{S_1} d\mathbf{S} - \iint_{S_2} d\mathbf{S} = \oint d\mathbf{S} = 0$$

也即不同曲面给出相同的磁矩 \mathbf{m} 。

§ 3.5 磁偶极矩产生的磁场以及磁标势

★由磁矩的矢势计算其产生的磁场:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{r_0} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{m} \nabla^2 \frac{1}{r_0} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r_0} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \right) &= \mathbf{m} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \right) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \\ &= -\mathbf{m} \times \left(\nabla \times \nabla \frac{1}{r_0} \right) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)}$$

★磁偶极矩的标势与电偶极矩静电势形式相仿

注 意 量
纲 $\varphi_m - H, \mathbf{A} - B$

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi r_0^3}$$

§ 3.6 电流分布在外磁场中的能量

★具有电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 的体系在外磁场 $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})$ 中的相互作用能为:

$$W = \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e dV \quad (9)$$

★考虑载流为 I 的线圈在外磁场中的能量

Φ_e 为外磁场对线圈 L 的磁通量

$$W = I \oint_L \mathbf{A}_e \cdot d\mathbf{l} = I \iint_S \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{S} = I \Phi_e$$

★当电流区域线度远小于磁场变化线度时, 取坐标原点在位于线圈所在小区域并对外磁场 \mathbf{B}_e 展开, 可得:

$$\begin{aligned} W &= I \iint_S d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{B}_e(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{B}_e(0) + \cdots] \\ &\approx \mathbf{B}_e(0) \cdot I \iint_S d\mathbf{S} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0) \end{aligned}$$

§ 3.7 磁偶极子在外磁场中的有效势能

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e \quad (10)$$

★有效势能不是相互作用能, 二者之间相差一个负号!

★其原因在于计算相互作用能时假设了 I 与 I_e 均保持不变。

★(10)式和电偶极子在外电场中的能量 $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ 形式相似!

★磁偶极子在外磁场中所受的力:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}_e) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_e = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_e$$

当 \mathbf{B} 均匀时受力为零;
此处的 ∇ 是对场点作用,
故 \mathbf{m} 为常数

★磁偶极子在外磁场中的力矩:

$$L_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(mB_e \cos \theta) = -mB_e \sin \theta$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e$$

与静电场电偶极子力、力矩公式相符

§ 3.8 有效势能与相互作用能

★由于磁单极子不存在, 故此假设 I 与 I_e 保持不变时, 隐含了外电源对线圈作功。

★线圈 I 与 I_e 相互作用能:

$$W = \frac{1}{2} \left(I \oint \mathbf{A}_e \cdot d\mathbf{l} + I_e \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) = \frac{1}{2} (I\Phi_e + I_e\Phi)$$

电荷可以定住, 故此可以不做功! 想象模型: 电偶极子间距是活动的, 由于没有磁单极子, 故此定不住!

★当线圈运动时, 若保持电流 I 与 I_e 不变, 则磁能改变量:

$$\delta W = \frac{1}{2} (I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi)$$

★为了保持电流不变, 必须由电源提供能量, 以抵抗感应电动势所作功。

★线圈 L 与 L_e 上的感应电动势分别为:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_e}{dt}, \quad \mathcal{E}_e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

有效势能与相互作用能 (续)

★ δt 时间内感应电动势所作功:

$$\mathcal{E}I\delta t + \mathcal{E}_e I_e \delta t = -I\delta\Phi_e - I_e\delta\Phi$$

★电源为抵抗此感应电动势必须提供相当能量才能保持电流不变

$$\delta W_s = I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi = 2\delta W$$

★场对线圈所作功:

$$\delta A = \delta W_s - \delta W = \delta W$$

★即对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量!

★定义有效势能使得作功等于势函数的减小, 故此有:

$$U = -W = -\iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_e dV \approx -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$$

§ 3.9 小结

- ★ 空间中的电流体系，可以按其电流密度做出多极矩展开；
- ★ 由于不存在磁单极子，电流系统的零阶矩为零；
- ★ 电流体系磁偶极矩为 $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') dV'$ ；
- ★ 磁偶极矩矢势为 $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3}$ ，标势为 $\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi r_0^3}$ ，磁场为 $\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}$ ；
- ★ 电流线圈在外磁场中的能量 $W = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0)$ ，磁偶极子在外磁场中的有效势能 $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e$ ；
- ★ 磁场对线圈所作的功等于磁能的增量而不是其减小量；
- ★ 磁偶极子在外磁场中所受的力 $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_e$ ，力矩 $\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e$ ；
- ★ 磁偶极子与电偶极子有很多相似之处。

【习题】 Page 134: 13,14,15

第四节 阿哈罗诺夫-玻姆效应

(略)

第五节 超导体的电磁性质

(略)