第四章　电磁波的传播

第一章基本理论、二三章静电、磁问题；此之后章节介绍时变的电磁场；其中最为常见情况：电磁波；

本章电磁波的传播，辐射在第五章；

电磁波应用广泛：广播、通讯、光学等等方面；

求解麦克斯韦方程，需要注意：源项、位型、边界条件、介质、频率

内 容 提 要

第一节　平面电磁波

§ 1.1　电磁场的波动方程

研究无源场：$\rho = 0$、$\boldsymbol{J} = 0$。即便是有源，也可以挖去该空间，使得其外是无源的：这也是经常遇到的问题；

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

★研究在没有电荷电流分布的自由空间（或均匀介质）中的电磁场：

与静的电磁场不同，电与磁耦合起来了。

注意电磁的对偶性：说明了求解出的$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$性质大多相仿；

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

要求解该方程必须有本构关系式的支持

§ 1.2　真空下电磁场的波动方程

★讨论真空情形：$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

★利用$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$可得：

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

★同理:

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}$相差一个速度量纲:用洛仑兹力最好判断

真空下电磁场的波动方程（续）

★令

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

这就是无阻尼的波动方程，它的解太多了，仅规定了速度为c。频率、位型、边条件不同解不同!

★ c是电磁波在真空中的传播速度;

★ 一切电磁波（不同频率）在真空中传播速度相同;

★ c是最基本的物理常数之一。

§ 1.3 介质中电磁波的传播

★当介质受到电磁波作用时，其极化率与磁化率不再是常数:

$$\chi_e = \chi_e(\omega) \qquad , \qquad \chi_M = \chi_M(\omega)$$

★原因在于束缚电荷受电磁波电场作用，在作受迫振动;
★在线性介质中:

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$$

$$\boldsymbol{B}(\omega) = \mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$$

★电容率$\varepsilon(\omega)$与磁导率$\mu(\omega)$随频率而变的现象称之为介质的色散。
【注意】 色散介质中$D(t) = \varepsilon E(t)$不再成立。

仅对单个频率有线性关系:故应该分频率讨论电磁波的传播

§ 1.4 时谐电磁波

【定义】 以一定频率作正弦振荡的波称为时谐电磁波，或称为单色波;

激发源是单一频率振荡，辐射出的波也是单色波;

实际情况中常常遇到:广播、通讯中的载波、激光器输出的光束;

这也是最简单的电磁波情况;

即使不是单色波，也可用傅立叶分析的方法进行分解:分解为不同频率单色波的叠加;

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad , \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) \qquad , \qquad \boldsymbol{B}(\omega) = \mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$$

★用复数形式表示（有意义的仅是实部$\cos\omega t$）电磁场为:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\, e^{-i\omega t}$$

★为简单起见，上式用同一个符号$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$表示不含时间因子$e^{-i\omega t}$的电场强度;

§ 1.5 亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}\quad,\quad\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\quad,\quad\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

★上述四个方程中仅前两个是独立的。对第一式两端求旋度:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla^2\boldsymbol{E}=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$
$$k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{i}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{E}$$

亥姆霍兹(Helmholtz)方程（续）

★亥姆霍兹方程(1)是一定频率下电磁波的基本方程，其解$\boldsymbol{E}(x)$代表电磁波场强在空间中的分布，每一种可能的形式称为一种波模。

★无源麦克斯韦方程组在一定频率下可化为:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0\tag{1}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$
$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{E}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{B}+k^2\boldsymbol{B}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$
$$\boldsymbol{E}=\frac{i}{k\sqrt{\mu\varepsilon}}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

§ 1.6 平面电磁波

★在亥姆霍兹方程的基础上，限定无界空间、无限大平板位型，可以给出最简单的波模：平面电磁波；

广播天线发射出的球面波，沿传输线或波导定向传播的波，由激光器激发的狭窄光束，都是亥姆霍兹方程的解

最简单也就是最基本：相当于一个基;

★设电磁波沿x轴传播，在$x=x_0$平面上$\boldsymbol{E}$均相同，此时可用一维模型替代:

$$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{E}(x)+k^2\boldsymbol{E}(x)=0$$
$$\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}_0\,e^{ikx}$$

$\boldsymbol{E}_0 e^{-ikx}$也是一个解

★将时间项和起来可得:

$$\boldsymbol{E}(x,t)=\boldsymbol{E}_0\,e^{i(kx-\omega t)}$$

★由条件$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$可得：$ik\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=0$，也即：$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{E}_0$与$x$轴垂直;

★平面波电场的振幅为$\boldsymbol{E}_0$，$e^{i(kx-\omega t)}$代表相位因子;

§ 1.7　∇的性质

★ $\nabla \to i\boldsymbol{k}$（可点、可叉、可并）

- ◆ $\nabla\cdot \quad \to \quad i\boldsymbol{k}\cdot$
- ◆ $\nabla\times \quad \to \quad i\boldsymbol{k}\times$

★ $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

§ 1.8　平面电磁波的等相面及相速度

【定义】 在某一时刻相位相同的点组成的面，称之为等相面（波阵面）。

★平面电磁波的等相面为一平面，且垂直于传播方向;

$$kx-\omega t=\text{const} \Rightarrow kx=\text{const} \Rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\text{const}$$

★相速度：相位移动的速度（等相面的法向速度）;

$$kx-\omega t=\text{const} \Rightarrow v_p=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

★群速度：波包传递的速度，能量传递的速度;

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}$$

§ 1.9　介质的色散

★真空中电磁波的传播速度为:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

★介质中电磁波的传播速度为:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r(\omega)\varepsilon_r(\omega)}}=\frac{c}{n(\omega)}$$

★n称之为折射率;
★介质中不同频率的电磁波有不同的相速度，这就是介质的色散现象。
★ω与k的关系称之为色散关系：$\omega=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}k$

§ 1.10　平面电磁波的传播方向及波矢量

★一般坐标系下的平面电磁波:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{2}$$

★易知等相面$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\text{const}$为垂直于$\boldsymbol{k}$的平面：式(2)为沿$\boldsymbol{k}$传播的平面波;

★k称为波矢量，其大小称为波数：波数反应了空间的周期性。

★在任一时刻，两个相角相差2π的等相面，空间上相差一个周期，即一个波长:

$$k\lambda=2\pi \Rightarrow k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

§ 1.11 平面电磁波的偏振

【定义】 振动方向垂直于传播方向的波动，称之为横波；振动方向平行于传播方向的波动，称之为纵波；

◆对平面电磁波的解(2)式两端求散度，可得：$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$

◆故：平面电磁波是横波；

◆电场振荡方向垂直于传播方向；$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$

【定义】 $\boldsymbol{E}$的取向，称为电磁波的偏振方向；

◆垂直于$\boldsymbol{k}$有两个互相正交的方向：故此，对于每一波矢$\boldsymbol{k}$，存在两个独立的偏振波；

◆电、磁分量不独立：

$$\boldsymbol{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}\qquad,\qquad\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

◆$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{k}$构成右手定则。

§ 1.12 平面电磁波的性质小结

★ 电磁波为横波，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$都与传播方向$\boldsymbol{k}$垂直；

★ $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$互相垂直，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$沿波矢$\boldsymbol{k}$方向；

★ $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$同相，振幅比为v。

★ 平面电磁波的传播速度为$v=\frac{c}{n}$，$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$为折射率。

§ 1.13 电磁波的能量和能流

★平面电磁波的能量密度：

$$\omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2)$$

◆由于$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$，可知平面电磁波中电场能量与磁场能量相等：

$$\omega=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$$

★平面电磁波的能流密度：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E})=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{e}_k$$

$$S=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\omega\boldsymbol{e}_k=v\omega\boldsymbol{e}_k$$

电磁波的能量和能流（续）

★能量和能流其实是随时间变化的脉动量，但实际上只需要时间平均值;
★可利用周期平均公式:

$$\bar{fg} = \frac{1}{T}\int_0^T fg\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(f^* g)$$

★可得能量密度与能流密度的平均值为:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu}B_0^2$$

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2 \boldsymbol{e}_k$$

§ 1.14　小结

★ 真空下的电磁场波动方程;

★ 介质中时谐电磁波的亥姆霍兹方程;

★ 给定适当位型及边界条件，亥姆霍兹方程的解为平面电磁波;

★ 平面电磁波有如下性质:

- ◆ 平面电磁波为横波，有两个独立偏振方向;
- ◆ $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$互相垂直，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$沿波矢$\boldsymbol{k}$方向;
- ◆ $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$同相，振幅比为v;
- ◆ 平面电磁波的传播速度为$v = \frac{c}{n}$，$n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$为折射率;

★ 平面电磁波的能量密度与能流密度;

【习题】 Page 179: 1,4,5

第二节　电磁波的反射和折射

§ 2.1　反射、折射的基本规律

波动特性：反射、折射、衍射、散射；（辐射）

反射、折射、入射方向（角）、相位与振幅的关系;

方法：求解边值问题;

进一步验证光的电磁理论

★ 反射波和折射波的频率与入射波的频率相等;

★ 入射线、反射线与折射线在同一平面内;

★ 入射角等于反射角;

★ 入射角与折射角的正弦之比与相对折射率成反比;

★ 入射波、反射波与折射波的振幅满足菲涅耳(Fresnel)公式。

§ 2.2 绝缘介质界面上的边值关系

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\quad\Rightarrow\quad\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

结合时谐电磁波麦克斯韦方程组，由第一二边界条件可推出第三四边界条件。

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1)=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1)]=0$$

§ 2.3 反射波与折射波

★考虑两种介质的分界面为无限大平面，一束平面电磁波入射于界面;

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$

★在边界处激发新的波，在介质1内传播的称为反射波，在介质2中的称为折射波。

★作符合位型的最简单假设：反射波与折射波也都为平面波，即：

事后发现这种假设的确成立：理论上有解，实验上验证;

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0'\,e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-\omega' t)}$$

$$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}_0''\,e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}-\omega'' t)}$$

【注意】 在介质1中总场强为入射波与反射波场强的叠加，而介质2中只有折射波。

§ 2.4 反射与折射定律的给出

★由于在分界面$z=0$上的任意时刻t、任意位置$(x,y,0)$均满足边界条件

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}''$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_0\,e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}+\boldsymbol{E}_0'\,e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}-\omega' t)})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0''\,e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{x}-\omega'' t)}$$

★反射波和折射波的频率与入射波的频率相等：$\omega=\omega'=\omega''$;

$$k_x=k_x'=k_x''\qquad,\qquad k_y=k_y'=k_y''$$

为什么没有k_z的限制?

★不失一般性选择$k_y=0$，即：入射线、反射线与折射线在同一平面$y=0$内;

反射与折射定律的给出（续）

$$k \sin\theta = k' \sin\theta' = k'' \sin\theta''$$
$$k = k' = \frac{\omega}{v_1} \quad , \quad k'' = \frac{\omega}{v_2}$$

★可以给出：入射角等于反射角；

$$\theta = \theta'$$

★入射角与折射角的关系：

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

★一般而言（除铁磁介质外）$\mu \approx \mu_0$，故$\frac{n_2}{n_1} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

§ 2.5　两种独立的偏振波

- ★ 平面电磁波反射、折射的振幅关系与偏振有关；
- ★ 斜入射的平面电磁波有两种偏振方式：s偏振与p偏振；
- ★ s偏振：$\boldsymbol{E}$垂直于入射面，电场没有垂直于分界面的分量；
- ★ p偏振：$\boldsymbol{E}$平行于入射面，存在垂直于分界面的电场分量；
- ★ 若入射波是s偏振，则反射、折射波也是s偏振；　可以用反证法证明
- ★ 若入射波是p偏振，则反射、折射波也是p偏振；

§ 2.6　s偏振振幅关系菲涅耳(Fresnel)公式

★对于s偏振:　折射、反射时能量守恒

$$E + E' = E''$$
$$H\cos\theta - H'\cos\theta' = H''\cos\theta''$$

★利用$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$，并取$\mu = \mu_0$可得:

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E - E')\cos\theta = \sqrt{\varepsilon_2}E''\cos\theta''$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \tag{3}$$
$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')}$$

§ 2.7　p偏振振幅关系菲涅耳(Fresnel)公式

★对于p偏振:

$$H + H' = H''$$

$$E\cos\theta - E'\cos\theta' = E''\cos\theta''$$

★利用$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$，并取$\mu = \mu_0$可得:

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E + E') = \sqrt{\varepsilon_2}E''$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \tag{4}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')\cos(\theta - \theta'')}$$

§ 2.8　布儒斯特(Brewster)定律与半波损失

【布儒斯特定律】 当$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$时，p偏振公式(4)中$\frac{E'}{E} \to 0$；也即:

◆p偏振分量没有反射波;

◆因此反射光变为完全的s偏振光。 可以用作线偏振器

◆此时的入射角称为布儒斯特角。

【半波损失】 在s偏振的反射过程中，当$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$时$\theta > \theta''$，因此: 光疏进光密

◆在s偏振的菲涅耳公式(3)中$\frac{E'}{E}$为负数，也即:

◆即反射波电场与入射波电场反相，这现象称为反射过程的半波损失。

现实中的例子即为拿个绳子甩，绳头固定，反射波半波损失;

§ 2.9　全反射

【定义】 若$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，当时电磁波入射角$\theta = \arcsin(\frac{n_2}{n_1})$时，$\theta'' = \frac{\pi}{2}$；当$\sin\theta \geq \frac{n_2}{n_1}$时，称之为全反射。 从光密进光疏

◆含虚波矢$\boldsymbol{k}$的平面波，仍然是亥姆霍兹方程的解;

◆波矢$\boldsymbol{k}$的虚部表征波透入的深度。

$$k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2 = k''^2 \quad , \quad k_x'' = k_x = k\sin\theta \quad , \quad k'' = k\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

$$k_z'' = i\kappa \quad , \quad \kappa = k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_0''\, e^{-\kappa z}\, e^{i(k_x'' x - \omega t)}$$

在$z > 0$时很快趋于零，能量也打不进去

★电磁波深入厚度的量级与波长相仿:

$$\kappa^{-1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}$$

全反射（续）

★在s偏振中全反射的振幅关系：

$$\frac{E'}{E}=\frac{\cos\theta-i\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}{\cos\theta+i\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=e^{-2i\phi}$$

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}{\cos\theta}$$

★由于$\left|\frac{E'}{E}\right|=1$，故此电磁能量被全部反射出去了—全反射;

★在半周内，电磁能量透入第二介质，在界面附近薄层内储存起来，在另一半周内，该能量释放出来变为反射波能量。

§ 2.10 小结

- ★ 本节从麦克斯韦方程以及边值关系出发给出电磁波的反射与折射规律;
- ★ 反射波和折射波的频率与入射波的频率相等;
- ★ 入射线、反射线与折射线在同一平面内;
- ★ 入射角等于反射角;
- ★ 入射角与折射角的正弦之比与相对折射率成反比;
- ★ 入射波、反射波与折射波的振幅满足菲涅耳(Fresnel)公式。
- ★ 布儒斯特定律：当$\theta+\theta''=\frac{\pi}{2}$时，反射光变为完全的s偏振光;
- ★ 半波损失：在s偏振的反射过程中，当$\varepsilon_2>\varepsilon_1$时，反射波电场与入射波电场反相;
- ★ 若$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，当时电磁波入射角$\theta\geq\arcsin(n_{21})$时会发生全反射。

【习题】 Page 179：2,3

附：证明

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{n}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{A}]=0$$

【证】

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{e}_x\times[A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z]\\&=-A_z\boldsymbol{e}_y+A_y\boldsymbol{e}_z=0\\A_y&=A_z=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{A}]&=\boldsymbol{e}_x\cdot\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\right]\\&=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0\end{aligned}$$

第三节　导体与电磁波

★ 本节研究电磁波在导体内的传播以及导体表面的反射;

★ 基本出发点是麦克斯韦方程组以及导体的本构关系式;

★ 线性绝缘介质的本构关系式：$\boldsymbol{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$，与导体比较有何异同;

形式相同，则可利用前两节的讨论，给出传播、折射、反射的结果;

- ◆ 静电场中的$\boldsymbol{E}=0$，在时变电磁场中是否同样成立？
- ◆ 在静电场中，由$\boldsymbol{J}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{E}=0$;
- ◆ 在时变电磁场中$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，当$\frac{1}{\sigma}\neq 0$时，导体内部电场不为零，伴随着能量损耗;
- ◆ 即使是理想良导体，在高频情况下，导体内部也可以存在电磁场;

非理想导体

举例：γ光可穿越导体：电磁波跨越导体

导体内部是否有电磁场与电导率没有关系；电导率者，碰撞、阻尼而已，与是否存在电磁场无关。

§ 3.1　导体内的自由电荷分布

【证明】 当电磁波频率不太高($\omega_0\ll 10^{17}\mathrm{s}^{-1}$)时，导体内部不带电，电荷只能分布与导体表面。

【证】 在设导体内部存在自由电子，以及与之相对应的带正电的本底，平衡时它们密度相等$\rho_{0+}=\rho_{0-}=\rho_0$共同维持电中性;

★若某区域中存在额外的自由电荷分布ρ，致使电中性破坏:

$$\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$$

★由自电场$\boldsymbol{E}$的作用下，导体内形成传导电流:

$\rho_0\approx 10^{22}\mathrm{cm}^{-3}\gg\rho$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\quad,\quad\sigma\propto(\rho+\rho_0)\approx\rho_0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{E})=\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\rho(t)=\rho|_{t=0}\,\exp(-\frac{\sigma}{\varepsilon}t)$$

导体内的自由电荷分布（续）

$$\rho(t)=\rho|_{t=0}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\quad,\quad\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\sigma\approx 10^{7}\,\mho\mathrm{m}^{-1}\quad,\quad\varepsilon\approx\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\mathrm{Fm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\approx 10^{17}\mathrm{s}^{-1}$$

★对于频率不太高($\omega_0\ll 10^{17}\mathrm{s}^{-1}$)的电磁波而言，存在:

$$\tau\ll\frac{2\pi}{\omega}\quad\text{or}\quad 1\ll\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

★即：导体内部自由电荷的驰豫时间尺度远小于电磁波的周期;
★故此：良导体内部没有自由电荷分布。

§ 3.2 导体内的电磁波

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,,\; \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,,\; \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

★已知导体内部$\rho = 0$，$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，对于一定频率的电磁波，可令$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu \boldsymbol{H}\,,\; \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} + \sigma \boldsymbol{E}\,,\; \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

★与绝缘介质的方程比较，引入复电容率则两组方程形式相同：只要替换原方程中的ε为ε'即可求得导体中电磁波的解。

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon' \boldsymbol{E}$$

§ 3.3 复电容率的意义

- ★ $\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$中的第一项$\varepsilon$由位移电流项而来，不消耗功率（$\boldsymbol{J}_d$与$\boldsymbol{E}$存在$\frac{\pi}{2}$相差）；
- ★ $\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$中的第二项$i\frac{\sigma}{\omega}$由传导电流而来，会引起能量耗散;
- ★ ε决定了导体的折射率;
- ★ $i\frac{\sigma}{\omega}$表征导体对电磁波的吸收;
- ★ 当电磁波的频率不太高时，$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$，故$\varepsilon' \approx i\frac{\sigma}{\omega}$。

§ 3.4 导体内部的平面波解

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

k为复数

$$\boldsymbol{H} = -\frac{i}{\omega\mu}\nabla \times \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

★其中$\boldsymbol{k}$为复矢量，其分量也为复数:

ω、$\boldsymbol{k}$表征时空周期性：$\omega_i(k_i)$引起时间(空间)方面的衰减，图像上表征为振荡的包络线

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0\, e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}}\, e^{i(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)}$$

波矢量$\boldsymbol{k}$的实部$\boldsymbol{\beta}$属描述波的传播的相位关系，虚部$\boldsymbol{\alpha}$描述波幅的衰减。$\boldsymbol{\beta}$称为相位常数，$\boldsymbol{\alpha}$称为衰减常数。

导体内部的平面波解（续）

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon' = \omega^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})$$

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$$

可得:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma \tag{6}$$

★综合(5)式、(6)式与边值关系即可求得波矢量。

§ 3.5　趋肤效应与穿透深度

★考虑电磁波正入射进入导体时的情况:

$$0 = k_x = \beta_x + i\alpha_x \quad\Rightarrow\quad \beta_x = \alpha_x = 0$$

★电磁波的波矢仅有z方向分量:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

★当$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$时，$k^2$的实部可以忽略，故此:

$$k^2 = i\omega\mu\sigma \quad\Rightarrow\quad k \approx \sqrt{i\omega\mu\sigma} \approx \beta + i\alpha$$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

趋肤效应与穿透深度（续）

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\,z\right]\,\exp\left[i(\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z - \omega t)\right]$$

★电磁波进入导体的特征长度称为穿透深度δ。（波幅降至原值$\frac{1}{e}$的传播距离）

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

★穿透深度与电导率及频率的平方根成反比。

◆例如对铜来说，$\sigma \approx 5\times 10^7 \mho\text{m}^{-1}$，当频率为50Hz时，$\delta \approx 0.9\text{cm}$;

◆当频率为100MHz时，$\delta \approx 0.7\times 10^{-3}\text{cm}$;

★对于高频电磁波，电磁场以及和它相作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内，这种现象称为趋肤效应。

电导率大，电场很快就驰豫掉了；频率越快，电子跑的距离越短：δ越小

§ 3.6 电磁场强度之间的关系

$$\boldsymbol{H} = -\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}$$

★当$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg 1$时将$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$带入

$$\boldsymbol{H}\approx\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}$$

★也即：磁场相位比电场相位滞后$\frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E}}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\gg 1$$

真空中$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

★故此：金属内电磁波的能量主要是磁场能量；导体中的磁场远比电场重要。

§ 3.7 导体表面上的反射

★利用复介电常数$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$，可以由前一节绝缘介质界面的电磁波的反射、折射关系给出导体表面的反射、折射。

★为简单起见，本节仅考虑正入射情况$\theta = 0$。

正入射只有s极化

$$E + E' = E'' \quad , \quad H\cos\theta - H'\cos\theta = H''\cos\theta''$$

$$\left|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E}}\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \quad , \quad \boldsymbol{H}'' = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}''$$

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E''$$

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

导体表面上的反射（续）

【定义】 沿法线方向的反射能流与入射能流之比，称为反射系数R。
【定义】 沿法线方向的折射能流与入射能流之比，称为折射系数T。

$$R = \left|\frac{E'}{E}\right|^2 = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1} \approx 1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

★良导体的反射系数接近于1;
★电导率越高，碰撞阻尼越小，导体吸收的能量越少，反射系数越接近1;
★电磁波频率越低，则反射系数越接近于1;
★在微波或无线电波情形下，可以将金属当作$R=1$的理想导体;

§ 3.8 例

【证明】 在良导体内，非垂直入射情形有:

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad , \quad \beta_x \ll \beta_z$$

【解】 考虑在良导体近似下，$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \approx i\frac{\sigma}{\omega}$
★导体内部的平面波解波矢k满足

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \approx 0$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

★边值关系为:

$$k_x^{(0)} = \beta_x + i\alpha_x$$

例（续）

故

$$\alpha_x = 0 \quad , \quad \beta_x = k_x^{(0)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \alpha_x\beta_x + \alpha_z\beta_z = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

$$\frac{1}{2}\omega\mu\sigma = \frac{1}{2}\omega^2\mu_0\varepsilon_0\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \gg \frac{1}{2}k^{(0)2}$$

$$\alpha_z\beta_z \gg \beta_x^2$$

$\lambda z \ll \lambda x$

略去β_x可得:

$$\alpha_z \approx \beta_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad , \quad \beta_x \ll \beta_z$$

【结论】 在任意入射角情形下，$\boldsymbol{\alpha}$垂直于表面，$\boldsymbol{\beta}$亦接近法线方向。

§ 3.9 小结

★ 良导体内部没有自由电荷分布，电荷只能分布于导体表面上;

★ 引入复电容率后描述导体与绝缘介质的两组方程形式相同;

- ◆ 复电容率$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$中的第一项$\varepsilon$由位移电流项而来，不消耗功率;
- ◆ 第二项$i\frac{\sigma}{\omega}$由传导电流而来，会引起能量耗散;

★ 电磁波在导体中的传播仅集中于表面很薄一层内，这种现象称之为趋肤效应;

★ 电磁波在导体中的穿透深度与电导率及频率的平方根成反比;

★ 金属内电磁波的能量主要是磁场能量，导体中的磁场远比电场重要;

★ 在微波或无线电波情形下，可以将金属当作$R = 1$的理想导体;

【习题】 Page 180: 6,7,8

第四节 波导

§ 4.1 有界空间中的电磁波

★ 电磁波在无界空间中的最基本存在形式为平面电磁波;

★ 电磁波入射在理想导体($\sigma \to \infty$)平面上会被全部反射，且穿透深度趋于零;

★ 导体可以作为边界限制电磁波——有界空间中的电磁波;

★ 有界空间中的电磁波实际应用极为重要:

- ◆ 微波技术中常用波导来传输电磁能量: 波导——中空的金属管;
- ◆ 谐振腔用来产生一定频率的电磁振荡: 谐振腔——增加两端面的波导管;

★ 求解满足一定边界条件的亥姆霍兹方程，会给出一些本征波模:

§ 4.2 高频电磁能量的传输

从低频(50Hz)到高频(100GHz)，电磁波的传输有以下变化:

★ 材料：双绞线、同轴电缆到波导管;

双绞线、同轴电缆（多连通截面波导、可以建立静电场）传播的是TEM模，也不存在截至频率;

★ 描述方程：电路分析到亥姆霍兹方程;

★ 物理:

- ◆ 从时间方面看：ω增大辐射不可忽略;
- ◆ 从空间方面看：λ减小实际尺寸必须考虑波动效应;
- ◆ 从能耗方面看：辐射、趋肤效应造成的欧姆损耗都变大了;

甩绳子模型：甩得慢波传不出去；仅快不行：得甩；δ甩法也会有波。

常见波导：圆柱形、矩形

§ 4.3 理想导体边界条件

角标c代表理想导体，无角标代表真空或绝缘介质；$\boldsymbol{n}$由导体指向介质;

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_c)=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_c)=\boldsymbol{\alpha}_f \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\alpha}_f \tag{8}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_c)=\sigma_f \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\sigma_f \tag{9}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_c)=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{10}$$

★在理想导体情况下，认为穿透深度为零，可认为导体内部没有电磁场;

或者作高斯面时包括进穿透深度

★由于$\boldsymbol{\alpha}_f$、σ_f未定，故此式(8)与(9)主要用来求解$\boldsymbol{\alpha}_f$和σ_f;
★真正制约着电磁波存在形式的边界条件是式(7)与(10);
★在导体表面上，电场线与界面正交，磁感应线与界面相切。

§ 4.4 例

【定义】 电场和磁场都作横向振荡，这种类型的波称为横电磁 TEM (Transverse Electro-Magnetic mode) 波，如平面电磁波。
【证明】 两平行无穷大导体平面之间可以传播一种偏振的TEM电磁波。
【证】 设两导体板与y轴垂直，故在导体边界存在:

$$E_x=E_z=0 \qquad , \qquad B_y=0$$

不失一般性，设电磁波沿z轴传播，则可知:

◆当$\boldsymbol{E}$沿x轴方向偏振，在导体界面处$\boldsymbol{E}$与导体面相切，不满足边界条件;

◆只有当$\boldsymbol{E}$沿y轴方向偏振，平面波才可以满足上述边界条件;

★即：两导体板之间只能传播一种偏振的TEM平面波。

§ 4.5 波导管中电磁波的场方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \quad , \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \boldsymbol{E}$$

★边界条件：在良导体边界上满足：

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

★电磁波沿z方向传播，故此可设：

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \boldsymbol{E}_0(x,y) e^{ik_z z} \quad , \quad \boldsymbol{B}(x,y,z) = \boldsymbol{B}_0(x,y) e^{ik_z z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \boldsymbol{E}_0 = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - k_z^2$$

波导管中电磁波的场方程（续）

★由麦克斯韦方程组$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$得：

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - ik_z E_{0y} = i\omega B_{0x} = ikc B_{0x} \tag{11}$$

$$ik_z E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = ikc B_{0y} \tag{12}$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = ikc B_{0z}$$

由麦克斯韦方程组$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$得：

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - ik_z B_{0y} = -i\frac{k}{c} E_{0x} \tag{13}$$

$$ik_z B_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = -i\frac{k}{c} E_{0y} \tag{14}$$

$$\frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -i\frac{k}{c} E_{0z}$$

§ 4.6 波导管中电磁波的偏振模式

$$E_{0x} = \frac{i}{k_c^2}\left(kc\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + k_z\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right)$$

$$E_{0y} = -\frac{i}{k_c^2}\left(kc\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} - k_z\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right)$$

$$B_{0x} = -\frac{i}{k_c^2}\left(-k_z\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} + \frac{k}{c}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right)$$

$$B_{0y} = \frac{i}{k_c^2}\left(k_z\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + \frac{k}{c}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right)$$

- ★ 电磁场的纵向分量E_{0z}、B_{0z}确定了整个场分布；
- ★ 单连通区域波导管中E_{0z}、B_{0z}不能同时为零：波导中不能传播TEM波！
- ★ 当$E_{0z}=0$而$B_{0z}\neq 0$时，称为横电TE(Transverse Electric)波，或称为H波；
- ★ 当$B_{0z}=0$而$E_{0z}\neq 0$时，称为横磁TM(Transverse Magnetic)波，或称为E波；

§ 4.7 矩形波导中的横电波

$$E_{0z}=0 \qquad , \qquad B_{0z}\neq 0$$

由原来的求解矢量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$问题转化为标量B_{0z}问题：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)B_{0z}=0$$

$$B_{0x}=i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \qquad , \qquad B_{0y}=i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$$

$$E_{0x}=i\frac{kc}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} \qquad , \qquad E_{0y}=-i\frac{kc}{k_c^2}\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}$$

矩形波导中的横电波（续一）

★边界条件：在$x=0, x=a$面上有$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$也即$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{B}=0$

$$\left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=a}}=0$$

在$y=0, y=b$面上有$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$

$$\left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=b}}=0$$

★由分离变量法可求得：

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$B_{0z} = B_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad , \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad , \quad (m, n = 0, 1, 2 \cdots)$$

矩形波导中的横电波（续二）

$$E_x = -i\frac{n\pi}{b}\frac{ck}{k_c^2}B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left[i\left(k_z z - \omega t\right)\right]$$

$$E_y = i\frac{m\pi}{a}\frac{ck}{k_c^2}B_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left[i\left(k_z z - \omega t\right)\right]$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -i\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}B_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left[i\left(k_z z - \omega t\right)\right]$$

$$B_y = -i\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left[i\left(k_z z - \omega t\right)\right]$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left[i\left(k_z z - \omega t\right)\right]$$

§ 4.8 矩形波导中的横磁波

$$E_{0z} \neq 0 \quad , \quad B_{0z} = 0$$

由原来的求解矢量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$问题转化为标量E_{0z}问题:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) E_{0z} = 0$$

$$E_{0x} = i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \quad , \quad E_{0y} = i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}$$

$$B_{0x} = -i\frac{k}{ck_c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \quad , \quad B_{0y} = i\frac{k}{vk_c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}$$

矩形波导中的横磁波（续一）

★边界条件：在$x=0, x=a$面上有$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$

$$E_{0z}|_{x=a}^{x=0}=0$$

在$y=0, y=b$面上有$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$

$$E_{0z}|_{y=b}^{y=0}=0$$

★由分离变量法可求得：

$$k_c^2=k_x^2+k_y^2$$

$$E_{0z}=E_0\sin(k_x x)\sin(k_y y)$$

$$k_x=\frac{m\pi}{a}\quad,\quad k_y=\frac{n\pi}{b}\quad,\quad (m,n=0,1,2\cdots)$$

矩形波导中的横磁波（续二）

$$E_x=i\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]$$

$$E_y=i\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]$$

$$E_z=E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]$$

$$B_x=-i\frac{n\pi}{b}\frac{k}{ck_c^2}E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]$$

$$B_y=i\frac{m\pi}{a}\frac{k}{ck_c^2}E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]$$

$$B_z=0$$

§ 4.9 波导传输电磁波的截至频率

★ 方程的中不同的(m,n)给出不同的**本征解**，对应着不同的场结构，称之为不同的**波模**；

★ 一组(m,n)对应两种独立波模：TE波记为TE_{mn}或H_{mn}，TM波记为TM_{mn}或E_{mn}；

★ 一般情形下，波导中的波场是多种本征模式的叠加；

★ 在波导(a,b)中传播的对应于(m,n)电磁波模，其频率必须大于某临界值，称为截至频率:

$$\omega \geq \omega_{mn}^c = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

◆k_z若是虚数，这时传播因子$e^{ik_z z}$变为衰减因子，不再是行波:

$$k_z^2 = k^2 - k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \geq 0$$

★ 当$a > b$时，波导的最低截至频率，就等于TE_{10}波的截至频率：$\omega_{10}^c = \frac{\pi c}{a}$

★ 对应的波长就是波导管能容纳的最大截至波长：$\lambda_{10}^c = 2a$ TE_{10}最简单最常用

§ 4.10 TE_{10}波的电磁场和管壁电流

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\pi}{a}\frac{ck}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\omega t - k_z z\right)$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -\frac{\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2} B_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\omega t - k_z z\right)$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\omega t - k_z z\right)$$

★由边界条件可给出面电流分布：$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\alpha}_f$
★如图所示，可以看出横电性，但磁场有z方向分量。
★窄边纵向电流为零（可横向开缝），宽边中线横向电流为零（可纵向开缝）。

§ 4.11 小结

★ 以导体为边界的有界空间电磁波——谐振腔与波导管;

★ 导体表面边界条件：电场线与界面正交，磁感应线与界面相切;

★ 微波波段电磁波可以用波导管传输;

★ 波导管内电磁场可由其纵向分量B_{0z}、E_{0z}确定;

★ 单连通区域波导管中存在两种独立波模：TE和TM波模，而TEM波不能传播;

★ 一般情形下，波导中的波场是多种本征模式的叠加;

★ 在波导(a,b)中传播的对应于(m,n)电磁波模，必须大于其截至频率；

★ 波导管中最低频率的波模为TE$_{10}$波，其截至频率为：$\omega_{10}^c=\frac{\pi c}{a}$；

★ 相对应的波长就是波导管能容纳的最大截至波长：$\lambda_{10}^c=2a$。

【习题】 Page 181：9,12,13

第五节 谐振腔

§ 5.1 矩形谐振腔

设想矩形谐振腔为矩形波导两端加上垂直端面构成，故此波导内的场由前进波与反射波叠加而成；

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{E}_0(x,y)e^{ik_zz}+\boldsymbol{E}_0'(x,y)e^{-ik_zz}$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z)=\boldsymbol{B}_0(x,y)e^{ik_zz}+\boldsymbol{B}_0'(x,y)e^{-ik_zz}$$

当端面也为理想导体时，其边界条件为：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}|_{z=d}^{z=0}=0 \qquad , \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}|_{z=d}^{z=0}=0$$

§ 5.2 矩形谐振腔中沿z轴的横电TE波模

$$\begin{aligned}E_x=&-\mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{ck}{k_c^2}\left[B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_zz}\right.\\&\left.+B_0'\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_zz}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_y=&-\mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{ck}{k_c^2}\left[B_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_zz}\right.\\&\left.+B_0'\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_zz}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

$$E_z=0$$

$$\begin{aligned}B_x=&-\mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}\left[B_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_zz}\right.\\&\left.-B_0'\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_zz}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_y=&-\mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}\left[B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_zz}\right.\\&\left.-B_0'\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_zz}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

$$B_z = \left[B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} + B_0' \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

当$z=0$时满足边界条件$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$

$$B_z|_{z=0} = (B_0+B_0')\left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos 0\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 0$$

$$B_0' = -B_0$$

当$z=d$时满足边界条件$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$自然满足

$$B_z|_{z=d} = 2\mathrm{i}B_0\left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin k_z d\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 0$$

$$\sin k_z d = 0 \quad \Rightarrow \quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad , \quad (p=0,1,2\cdots)$$

§ 5.3　矩形谐振腔内沿z轴TE模的电磁场

$$E_x = 2B_0\frac{n\pi}{b}\frac{ck}{k_c^2}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_y = -2B_0\frac{m\pi}{a}\frac{ck}{k_c^2}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -\mathrm{i}2B_0\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_y = -\mathrm{i}2B_0\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_z = \mathrm{i}2B_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

§ 5.4 矩形谐振腔中沿z轴的横磁TM波模

$$E_x = \mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}\Big[E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} - E_0'\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_y = \mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}\Big[E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} - E_0'\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_z = \Big[E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} + E_0'\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_x = -\mathrm{i}\frac{n\pi}{b}\frac{k}{ck_c^2}\Big[E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} + E_0'\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_y = \mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{k}{ck_c^2}\Big[E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\mathrm{i}k_z z} + E_0'\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\mathrm{i}k_z z}\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_z = 0$$

当$z=0$时满足边界条件$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$ E_y同样满足

$$E_x|_{z=0} = \mathrm{i}\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}(E_0-E_0')\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 0$$

$$E_0' = E_0$$

当$z=d$时满足边界条件$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$ $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$自然满足

$$E_x|_{z=d} = -2E_0\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}\Big[\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin k_z d\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 0$$

$$\sin k_z d = 0 \quad\Rightarrow\quad k_z = \frac{p\pi}{d} \quad , \quad (p = 0,1,2\cdots)$$

§ 5.5 矩形谐振腔内沿z轴TM模的电磁场

$$E_x = -2E_0 \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_y = -2E_0 \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$E_z = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_x = -\mathrm{i}2E_0 \frac{n\pi}{b} \frac{k}{ck_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_y = \mathrm{i}2E_0 \frac{m\pi}{a} \frac{k}{ck_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$B_z = 0$$

§ 5.6 谐振腔的本征频率

★谐振腔内的振荡频率只可以出现某些值，称之为**本征频率**:

台球模型

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$$

★谐振腔允许的最低本征频率应该当m, n, p分别取最小值时:

◆若取$(m,n,p) = (1,1,0)$，$k_z = 0$，由式(15)可知: $E_x = E_y = 0$

◆若取$(m,n,p) = (1,0,0)$，$k_z = k_y = 0$，由式(15)可知: $E_x = E_y = E_z = 0$

◆即: (m,n,p)最多只能有一个为零。

◆设$L_1 \geq L_2 \geq L_3$，故最低频率的谐振波模为$(1,1,0)$，谐振频率为

波长相当与电磁波的个子: 看看谐振腔能否装得下?

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

◆相应的最大电磁波波长为: $\lambda_{110} = 2\left[L_1^{-2} + L_2^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

与台球模型的异同

§ 5.7 小结

★ 谐振腔内的本征频率只可以出现某些分离的值;

驻波

★ 谐振腔的有限空间限制了电磁波以多种本征振荡模式存在;

可以是单个模式，也可以是多种模式的叠加。由初始条件（激励）确定。

★ 谐振腔允许的最低本征频率为$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[L_1^{-2} + L_2^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$;

★ 谐振腔容纳的最大电磁波波长为$\lambda_{110} = 2\left[L_1^{-2} + L_2^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$。

【习题】 Page 181: 14,15

附：课本中关于谐振腔的推导

由于L、C很小时辐射损耗增大、趋肤效应造成焦耳损耗增大，LC回路不再适合产生高频电磁振荡;

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0 \qquad , \qquad k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}$$

不失一般性求解E_x分量（E_y、E_z、B_x、B_y、B_z求解方法类似）
★用分离变量法，令

$$E_x(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0\,,\ \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0\,,\ \frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0 \\ k_x^2+k_y^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon \end{cases}$$

附：课本中关于谐振腔的推导（续一）

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z)=&(c_1\cos k_xx+d_1\sin k_xx)(c_2\cos k_yy+d_2\sin k_yy)\\ &\cdot(c_3\cos k_zz+d_3\sin k_zz)\end{aligned}$$

◆利用边界条件：在$y=0$处有：$E_x=0 \quad \Rightarrow \quad c_2=0$
◆在$z=0$处有：$E_x=0 \quad \Rightarrow \quad c_3=0$
◆在$x=0$处考虑到端面的反射作用，认为E_x应由沿着x方向传播的前进波以及沿着$-x$方向传播的反射波叠加组成，选取$d_1=0$;

$$\begin{cases} E_x=A_1\cos k_xx\ \sin k_yy\ \sin k_zz \\ E_y=A_2\sin k_xx\ \cos k_yy\ \sin k_zz \\ E_z=A_3\sin k_xx\ \sin k_yy\ \cos k_zz \end{cases} \tag{15}$$

附：课本中关于谐振腔的推导（续二）

★再考虑$x=L_1$，$y=L_1$，$z=L_3$时的边界条件，不难得出：

$$k_x=\frac{m\pi}{L_1}\,,\ k_y=\frac{n\pi}{L_2}\,,\ k_z=\frac{p\pi}{L_3} \tag{16}$$

m,n,p分别代表沿矩形三边所含的半波数目$(m,n,p=0,1,2\cdots)$;
★由$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$可得：

$$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0 \tag{17}$$

★也即：A_1、A_2与A_3中只有两个独立分量：对于每一组(m,n,p)值有两个独立偏振波模。

由后面波导管的讨论可知：TE模与TH模

★满足关系式(16)和(17)时的解代表谐振腔内的一种**本征振荡**波模。

第六节　　高斯光束

（略）

第七节　等离子体与电磁波的相互作用

（略）