第五章　电磁波的辐射

内 容 提 要

高频交变电流辐射电磁波，微观辐射留给第七章;

电流与电磁场相互作用：忽略辐射阻尼，给定电流分布，计算辐射电磁波;

推广势的概念到时变电磁场;

从势的唯一性引入规范变换，达朗贝尔方程;

由相互作用非超距的，引入推迟势;

由推迟势辐射场，小区域电流，电偶极矩辐射、半波天线;

电磁理论推到惠更斯原理，次级光源;

辐射压力;

第一节　电磁场的矢势和标势

§ 1.1　矢势和标势

引入势：方便；量子力学、相对论中$\boldsymbol{A}, \varphi$很重要

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

★由$\boldsymbol{B}$的无源性引入矢势$\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{A}$的物理意义：通量

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} \quad ?= \quad -\nabla \varphi$$

★时变电磁场的$\boldsymbol{E}$不再是无旋的!

矢势和标势（续）

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

★由$(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t})$的无旋性引入标势$\varphi$:

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

一般而言：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

【讨论】

★ 电场$\boldsymbol{E}$不再是保守力场，势能、电压的概念失去原来意义；

★ 时变电磁场中，磁场和电场是相互耦合的整体：矢势和标势缺一不可！

★ $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{A}$均可分为两部分：横场（$\nabla\cdot\boldsymbol{f}_T=0$）与纵场（$\nabla\times\boldsymbol{f}_L=0$）；

§ 1.2 规范变换和规范不变性

★从$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$可看出：要确定$\boldsymbol{A}$还需要另加条件； 存在额外自由度
★用矢势$\boldsymbol{A}$与标势φ描述电磁场不唯一！

$$A\to A'=A+\nabla\psi \tag{1}$$

$$\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{2}$$

★$(\boldsymbol{A},\varphi)$与$(\boldsymbol{A}',\varphi')$描述同一种电磁场：

$$\nabla\times\boldsymbol{A}'=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

$$-\nabla\varphi'-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\boldsymbol{E}$$

【定义】 变换(1)和(2)式称为势的规范变换；
【定义】 描述相同的$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$的每一组$(\boldsymbol{A},\varphi)$称为一种规范。

规范变换和规范不变性（续）

★规范：明文规定或约定俗成的标准，一种限制；
◆guage：量计、标准度量；
◆规：有法度也。——《说文》；规者，正圆之器也。——《诗·沔水》序·笺

【定义】 当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为规范不变性。

【定义】 规范不变性是决定相互作用形式的一条基本原理，传递这些相互作用的场称为规范场。电磁场是一种规范场。

§ 1.3 库仑规范与洛伦兹规范

规范的选择是多样的：挑选出计算方便简化，且物理意义明显的规范，有两种：库仑规范与洛伦兹规范。

★库仑规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

◆库仑规范纵横分明：库仑场和感应场

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_L+\boldsymbol{E}_T \quad , \quad \boldsymbol{E}_L=-\nabla\varphi \quad , \quad \boldsymbol{E}_T=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

★洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

◆库仑规范简化了一个方程，洛伦兹规范对称了一对方程。
◆洛伦兹规范仍有多余的自由度！

§ 1.4 达朗贝尔(d' Alembert)方程

为什么麦克斯韦方程只写两个？

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\varphi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu_0\boldsymbol{J}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{4}$$

达朗贝尔(d' Alembert)方程（续一）

★利用库仑规范，(3)式和(4)式可改写为:

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

★库仑规范的特点：标势φ所满足的方程与静电场情形相同，其解是库仑势。

但注意电场不同！

达朗贝尔(d' Alembert)方程（续二）

★利用洛伦兹规范：(3)式和(4)式可改写为：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{5}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

★方程(5)和(6)称为达朗贝尔方程。

★ 达朗贝尔方程是自由项为电流密度和电荷密度的非齐次的波动方程；

在电荷电流为零的区域中，矢势、标势、电磁场都以波动形式在空间中传播；

★ 尽管洛伦兹规范给出波动形式的方程，但$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的波动性质是场本身的性质而和规范无关。

★ 方程(5)、(6)和(6)构成电动力学基本方程组；

良好的对称性：以后工作的好基础

§ 1.5 例 求平面电磁波的势。

【解】

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t\right)\right] \quad , \quad \varphi = \varphi_0 \exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t\right)\right]$$

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_0 = c\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{A}_0$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -i\boldsymbol{k}\left(c\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{A}\right) + i\omega\boldsymbol{A} \\ &= i\omega\left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{e}_k\left(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{A}\right)\right] = i\omega\left[\left(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{A}\right)\times\boldsymbol{e}_k\right] = -c\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

例 求平面电磁波的势（续一）

◆注意到平面波电磁场只依赖于矢势$\boldsymbol{A}$的横向分量，对$\boldsymbol{A}_0$加上任意纵向部分$\alpha\boldsymbol{e}_k$（同时对φ_0加上$c\alpha$，α为任意常数）都不影响电磁场值。

◆也即加上洛伦兹条件后，还存在剩余规范变换自由度。

◆最简单的选择是取$\boldsymbol{A}$只有横向部分，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=0$，因而$\varphi=0$，用该规范时有：

$$\boldsymbol{B}=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\quad,\quad\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{A}\quad,\quad\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=0$$

★如果采用库仑规范：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=0$$

$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

例 求平面电磁波的势（续二）

◆由于全空间$\rho=0$，故此库仑场标势φ为零或常数，不失一般性可取$\varphi=0$；代入方程可得：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0\exp\left[i\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t\right)\right]\quad,\quad\varphi=0$$

◆由库仑条件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$可得$\boldsymbol{A}$只有横向分量，故此$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$可得：

$$\boldsymbol{B}=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\quad,\quad\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{A}\quad,\quad\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=0$$

★两种规范求出的场一致！

★库仑规范的优点：其标势φ描述库仑作用，可直接由电荷分布ρ求出；而其矢势只有横向分量，刚好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振！

§ 1.6 小结

- ★ 时变电磁场可以用矢势和标势描述出来；
- ★ 高频电场中势能、电压的概念失去原来意义，磁场和电场是相互耦合的整体：矢势和标势缺一不可！
- ★ 用矢势$\boldsymbol{A}$与标势φ描述电磁场并不唯一，由此引入规范条件；
- ★ 两种常用规范——库仑规范与洛伦兹规范各有特色：
  - ◆ 库仑规范中库仑场和感应场纵横分明；
  - ◆ 库仑规范简化了一个方程，洛伦兹规范对称了一对方程；
  - ◆ 洛伦兹规范仍有多余的自由度；

★ 利用洛伦兹规范给出的达朗贝尔方程具有波动的形式，是电动力学势的基本方程组。

【习题】 Page 224: 1,2

第二节　推迟势

§ 2.1　时变点电荷的标势φ

【已知】 无界空间中，达朗贝尔方程为

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

其中源项为时变的点电荷

普遍情况可由线性叠加原理积分求得

当取$Q(t) = \delta(t)$时为推迟格林函数

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = Q(t)\delta(\boldsymbol{x})$$

【求解】 标势$\varphi(\boldsymbol{x},t)$?

§ 2.2　标势φ的解为发散球面波

【解】 由球对称性设$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \varphi(r,t)$,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad (r \neq 0) \tag{10}$$

式(10)的解为球面波。设$\varphi(r,t) = \frac{u(r,t)}{r}$并作代换:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(r,t) = f(t-\frac{r}{c}) + g(t+\frac{r}{c})$$

$$\varphi(r,t) = \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t+\frac{r}{c})}{r}$$

★考虑到研究的是辐射问题，故仅取发散球面波而令$g = 0$:

与初始条件有关：只取推迟势略去超前势

$$\varphi(r,t) = \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}$$

§ 2.3　发散球面波解与电量的关系

【回顾】 静电场下点电荷激发的电势：$\varphi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
【推想】 时变点电荷的标势为：

$$\varphi(r,t)=\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{11}$$

【验证】 式(11)是满足方程(9)的解。

★ 当$r\neq 0$时，由前所述可知：式(11)的确是波动方程(10)的解；

★ 现在可证明当$r=0$时，式(11)满足方程(9)；

- ◆ 当$r=0$时式(11)致使$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\to\infty$
- ◆ 以$r=0$为圆心、小量η为半径的球作体积分，积分结果应为$-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$。

§ 2.4　标势解的验证

$$\begin{aligned}
&\iiint \mathrm{d}V\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}\\
&=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\eta r^2\mathrm{d}r\,\nabla^2\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{r}-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\eta r\mathrm{d}r\,\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(t-\frac{r}{c})\\
&=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\eta r^2\mathrm{d}r\left[Q\nabla^2\frac{1}{r}+2\nabla Q\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\nabla^2 Q\right]\\
&\approx\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\eta r^2\mathrm{d}r\,Q\nabla^2\frac{1}{r}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

即：当$r\to 0$时在半径为η的小球内$Q(t-\frac{r}{c})\to Q(t)$，故　　$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

$$\iiint\nabla^2\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}V\to\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\nabla^2\frac{1}{r}\,\mathrm{d}V=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

§ 2.5　空间分布的变化电荷激发标势和矢势

◆位于原点的时变点电荷激发标势为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\boldsymbol{r})$$

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{r}$$

◆位于$\boldsymbol{x}'$处的时变点电荷$Q(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$产生标势（设$r=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$）：

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\boldsymbol{x}',t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}$$

★空间分布的变化电荷激发标势: 线性叠加

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'$$

★空间分布的变化电荷激发矢势: 是否满足洛伦兹规范?

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'$$

§ 2.6 验证φ和$\boldsymbol{A}$满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

设

$$t'=t-\frac{r}{c}\qquad,\qquad\nabla=-\nabla'$$

复合函数的微分运算

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},\psi(\boldsymbol{r}))&=\frac{\partial f_x(\boldsymbol{r},\psi(\boldsymbol{r}))}{\partial x}+\frac{\partial f_y(\boldsymbol{r},\psi(\boldsymbol{r}))}{\partial y}+\frac{\partial f_z(\boldsymbol{r},\psi(\boldsymbol{r}))}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_x}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_y}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f_z}{\partial z}+\frac{\partial f_z}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial f_x}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\\&=\nabla_r\cdot\boldsymbol{f}+\nabla\psi\cdot\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\psi}\end{aligned}$$

验证φ和$\boldsymbol{A}$满足洛伦兹条件（续一）

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t'(r))}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[\nabla_r\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{r}+\nabla t'(r)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')\left(\nabla_r\cdot\frac{1}{r}\right)+\nabla t'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')\left(\nabla_r'\cdot\frac{1}{r}\right)-\nabla' t'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[-\left(\nabla_r'\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{r}-\frac{1}{r}\nabla_r'\cdot\boldsymbol{J}\right)-\nabla' t'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[\frac{1}{r}\nabla_r'\cdot\boldsymbol{J}-\left(\nabla_r'\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{r}+\nabla' t'\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}\right)]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[\frac{1}{r}\nabla_r'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t'(r))}{r}]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{1}{r}\nabla_r'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')\,\mathrm{d}V'-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\end{aligned}$$

验证φ和$\boldsymbol{A}$满足洛伦兹条件（续二）

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t')}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\boldsymbol{x}',t')\,\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint[\frac{1}{r}\nabla'_r\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\boldsymbol{x}',t')]\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{1}{r}[\nabla'_r\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')+\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\boldsymbol{x}',t')]\,\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\boldsymbol{x}',t')+\nabla'_r\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=0$$

§ 2.7　推迟势的物理意义及小结

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'\quad,\quad\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'$$

由于辐射阻尼的作用，ρ与$\boldsymbol{J}$不能任意规定

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\quad,\quad\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

★ 空间各点处的矢势与标势，是由电荷电流分布激发的;

★ 空间某点$\boldsymbol{x}$在某时刻t的场值并不是依赖于同一时刻的电荷电流分布，而是决定于较早时刻$t-\frac{r}{c}$的电荷电流分布——推迟势;

★ 推迟的时间$\frac{r}{c}$受两个因素的制约：传播速度与距离;

- ◆ 电磁相互作用以有限的速度传播;
- ◆ 不仅仅电磁相互作用，其实任何相互作用都满足以上规律;
- ◆ 只有非超距作用，才会有传播速度的概念;
- ◆ 从速度有限可知：相互作用传播速度存在某个最大值：光速！这正是相对论时空观的基础;

不仅仅是电磁!

★ 从推迟的时间受距离影响可知：点$\boldsymbol{x}$处t时刻测量到的电磁场是由不同位置不同时刻的电荷电流激发叠加而来。

习题5.5

设 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势，

（1） 引入一矢量函数 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},t)$ （赫兹矢量），若令 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial t}$ ，证明:

$$\varphi=-\nabla\cdot\boldsymbol{Z}$$

（2） 若令 $\boldsymbol{J}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ 证明 $\boldsymbol{Z}$ 满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial t}=-c^2\mu_0\boldsymbol{P}$$

并写出在真空中的推迟解。

（3） 证明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可通过 $\boldsymbol{Z}$ 用下列公式表出。

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{Z})-c^2\mu_0\boldsymbol{P}\quad,\quad\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{Z}$$

【习题】 Page 225: 3,4,5

第三节　电偶极辐射

§ 3.1　定域振荡源的辐射场

这种取法是具有普遍意义的

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t}\quad,\quad\rho(\boldsymbol{x}',t)=\rho(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,e^{-i(\omega t-kr)}}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=e^{-i\omega t}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}V'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}V'$$

其中e^{ikr}为推迟作用因子，$k=\frac{\omega}{c}$为波数

与静磁场相仿，只多了时间项、推迟项

推迟相因子——推迟势

定域振荡源的辐射场（续）

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\,e^{-i(\omega t-kr)}}{r}\,\mathrm{d}V'\\&=e^{-i\omega t}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}V'=\varphi(\boldsymbol{x})\,e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \qquad , \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

源外($\boldsymbol{J}=0$)区域:

其好处在于可以只求$\boldsymbol{A}$不算φ

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2}\boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

和电磁波方程一样，为什么？

§ 3.2 辐射场的划分

★描述辐射场的三种特征长度:

电流源的区域线度$l = \max|\boldsymbol{x}_1' - \boldsymbol{x}_2'|$、电磁波长$\lambda = \frac{2\pi}{k}$、电荷到场点的距离$r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$

本节研究小区域内电流产生的辐射: $l \ll \lambda$ and $l \ll r$

★依λ与r的关系划分三种不同的区域

近场有纵向分量，与电单极静态势无关。

★ 近（静态）区: $l \ll r \ll \lambda$ $\Rightarrow kr \ll 1$, $e^{ikr} \to 1$ $\boldsymbol{B}$存在纵向分量、场分布精确依赖于源分布、具有静态特征;

如书图5.4，近区场分布受源影响必会存在纵向分量

近场: 交流电，辐射忽略，似稳;

★ 中间（感应）区: $l \ll r \sim \lambda$ $\Rightarrow$过渡区域

★ 远（辐射）区: $l \ll \lambda \ll r$ $\Rightarrow kr \gg 1$, e^{ikr}波动效应显著、场与矢径垂直、场正比于r^{-1}、典型辐射场;

由于纵场辐射不出去，远区必横场，而库仑规范纵横分明，故此又称辐射规范

◆辐射阻抗、天线设计、发射系统: 近场、感应场

◆接受电磁波、辐射功率、辐射角分布: 远场

§ 3.3 小区域电流电荷分布的多极展开

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) \approx f(x_0,y_0,z_0) + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}$$

$$f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \approx f(\boldsymbol{x}) + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left(-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\right)^m f(\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}'=0}$$

选取坐标原点在电荷分布区域内，由小区域$l \ll \lambda$ 且 $l \ll r$，故:

$$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \approx |\boldsymbol{x}| - \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}' = r_0 - \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{x}'$$

$$\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, e^{ikr}}{r} = \frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, e^{ikr}}{r}\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} - (\boldsymbol{x}'\cdot\nabla)\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, e^{ikr}}{r}\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}$$
$$+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' : \nabla\nabla\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')\, e^{ikr}}{r}\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} + \cdots$$

小区域电流电荷分布的多极展开（续）

用$[\rho]$表示$\rho(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}$，$[J]$表示$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}$

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left\{\frac{[\rho]_0}{r_0} - \boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r_0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' : \nabla\nabla\frac{[\rho]_0}{r_0} + \cdots\right\}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\left\{\frac{[\boldsymbol{J}]_0}{r_0} - \boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{[\boldsymbol{J}]_0}{r_0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' : \nabla\nabla\frac{[\boldsymbol{J}]_0}{r_0} + \cdots\right\}\mathrm{d}V'$$

§ 3.4　电单极势

★标势φ展开中的第一项为电单极势:

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}(\boldsymbol{x})\,e^{-i\omega t} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{[\rho]_0}{r_0}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{x}', t-\frac{r_0}{c})}{r_0}\,\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\end{aligned}$$

★由于电荷守恒，故电单极势是静态的:

- ◆电单极势无法写成$e^{-i\omega t}$的形式;
- ◆随时间谐振的场中不存在单极子项

§ 3.5　电偶极辐射的标势与矢势

★标势φ展开中的第二项为电偶极势:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r_0}\,\mathrm{d}V' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{x}'[\rho]_0}{r_0}\,\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\left(\frac{1}{r_0}\iiint\boldsymbol{x}'[\rho]_0\,\mathrm{d}V'\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{[\boldsymbol{p}]}{r_0}\end{aligned}$$

其中$[\boldsymbol{p}] = \iiint\boldsymbol{x}'[\rho]_0\,\mathrm{d}V'$，对应着系统的电偶极矩;
矢势$\boldsymbol{A}$展开中的第一项描述了系统电偶极矩随时间的变化激发的矢势:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{[\boldsymbol{J}]_0}{r_0}\,\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\iiint[\boldsymbol{J}]_0\,\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r_0}[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}] = \frac{\mu_0}{4\pi r_0}[\dot{\boldsymbol{p}}]\end{aligned}$$

回顾静磁场多极矩展开中利用了$\nabla'\cdot\boldsymbol{J} = 0$，才致使$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0$。

$$\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}') = (\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\,\boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{J}\cdot\nabla')\,\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{J}$$

§ 3.6 电偶极辐射的电磁场

$$\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{[\boldsymbol{p}]}{r_0} \qquad , \qquad \boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r_0}[\dot{\boldsymbol{p}}]$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r_0}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\nabla\nabla\cdot\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r_0} - \frac{1}{c^2}\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{r_0}\right)$$

在源外区域:

$$\boldsymbol{E} = \frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B}$$

在辐射区($l \ll \lambda \ll r$)可以写出电偶极辐射的场为:

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0}\dot{\boldsymbol{p}}$$

电偶极辐射的电磁场(续一)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\dot{\boldsymbol{p}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi}\left(\nabla\frac{1}{r_0}\times\dot{p}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\left(\nabla e^{ikr_0}\times\dot{p}\right) \\
&= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi}\left(-\frac{\boldsymbol{e}_r}{r_0^2}\times\dot{\boldsymbol{p}}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r_0}\left(ike^{ikr_0}\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{p}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0}\left(\boldsymbol{e}_r\times\dot{p}\right)\left(-\frac{1}{r_0} + i\frac{2\pi}{\lambda}\right) \qquad\qquad \left(\frac{1}{r_0} \ll \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\
&\approx \frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi r_0}e^{ikr_0}\left(\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{p}}\right)
\end{aligned}$$

$$e^{ikr_0} \Rightarrow \nabla \to ik\boldsymbol{e}_r \quad , \quad e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \quad , \quad ik = i\frac{\omega}{c} \to -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

电偶极辐射的电磁场(续二)

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikr_0}}{4\pi r_0}\dot{\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi r_0}e^{ikr_0}\left(\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r_0}\left(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r\right)$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_0}\left(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r\right)\times\boldsymbol{e}_r$$

§ 3.7 电偶极辐射的偏振方向

选取坐标原点在电荷分布区域内，并以$\boldsymbol{p}$方向为极轴:

$$\boldsymbol{B} = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r_0} \left|\ddot{\boldsymbol{p}}\right| \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{e^{ikr_0}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_0} \left|\ddot{\boldsymbol{p}}\right| \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta$$

★ $\boldsymbol{B}$沿纬线振荡；$\boldsymbol{E}$沿经线振荡;

★ 磁感应线是围绕极轴的圆周，$\boldsymbol{B}$总保持横向;

静磁多极矩的方向?

★ 电场线是经面上的闭合曲线($\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$)，$\boldsymbol{E}$近似为横向;

略去$\frac{1}{r_0}$高次项后

静电多极矩的方向?

★ 电偶极辐射是空间中的TM波;

★ 在r很大时，球面波可看作平面波，此时的偏振为TEM波;

§ 3.8 偶极辐射的能流以及角分布

★辐射平均能流密度:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{S}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}\right) = \frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{e}_r\right) \times \boldsymbol{B}\right] \\ &= \frac{c}{2\mu_0}\left|\boldsymbol{B}\right|^2 \boldsymbol{e}_r = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r_0^2}\left|\ddot{\boldsymbol{p}}\right|^2 \sin^2\theta\, \boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

★电偶极辐射的角分布（方向性）：$\bar{\boldsymbol{S}} \propto \sin^2\theta\, \boldsymbol{e}_r$

可以由此判断源的性质

◆在$\theta=\frac{\pi}{2}$的平面上辐射最强;

◆沿电偶极矩轴线方向$\theta=0,\pi$时没有辐射。

§ 3.9 偶极辐射功率

★总辐射功率P

$$\begin{aligned}P &= \oint \bar{\boldsymbol{S}}\cdot \mathrm{d}\sigma = \oint \left|\bar{\boldsymbol{S}}\right| r_0^2 \cdot \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left|\ddot{\boldsymbol{p}}\right|^2 \oint \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\ddot{\boldsymbol{p}}\right|^2\end{aligned}$$

◆由通量守恒可知：只有场强正比于r_0^{-1}的项，才能辐射出去!

◆静电、磁的多极矩展开正比于r_0^{-n}，注意相互区别!

$$\varphi^{(0)} \propto \frac{1}{r_0} \quad , \quad \varphi^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2} \quad , \quad \varphi^{(2)} \propto \frac{1}{r_0^3}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2} \quad , \quad \varphi_m^{(1)} \propto \frac{1}{r_0^2}$$

§ 3.10 短天线的辐射

【已知】 中心馈电的短天线($l \ll \lambda$)，在馈点处载有电流最大值I_0，天线两端电流为零，设：

其实这是边值问题：但假设知道电流分布

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t) = I(z')\delta(x')\delta(y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\boldsymbol{e}_z$$

$$I(z') = I_0(1 - \frac{2}{l}\,|z'|) \qquad , \qquad |z'| \leq \frac{l}{2}$$

【求解】 辐射场与辐射电阻。

【解】 $l \ll \lambda$时即为电偶极辐射:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t)\,\mathrm{d}V' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}z' = \frac{1}{2}I_0 l\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\frac{\omega}{2}I_0 l\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\boldsymbol{e}_z$$

短天线的辐射（续）

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\,|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2 = \frac{I_0^2\omega^2 l^2}{48\pi\varepsilon_0 c^3} \\ &= \frac{I_0^2 l^2}{48\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c^2 = \frac{\pi I_0^2}{12\varepsilon_0 c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

★短天线的辐射功率正比于I_0、$(\frac{l}{\lambda})^2$:

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6\varepsilon_0 c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\right] I_0^2 = \frac{1}{2}R_r I_0^2$$

$$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad , \qquad (l \ll \lambda)$$

◆天线的辐射电阻越大，也即输入电流I_0给定时的辐射功率P越大——表征了天线辐射能力；

◆辐射电阻正比于$(\frac{l}{\lambda})^2$——要提高辐射能力就必须加大l——半波天线$l = \frac{\lambda}{2}$

§ 3.11 电磁场的动量密度与动量流密度

★电磁场动量密度$\boldsymbol{g}$为

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

★电磁场动量密度与能流密度间的关系：

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

★电磁场动量流密度$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)$$

★电磁场动量守恒的积分形式

$$\frac{d}{dt}\iiint \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}V = -\iiint \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V - \oint \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$

§ 3.12 例一求平面电磁波的动量流密度张量。

平面电磁波$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{k}$构成正交坐标，故此分解张力张量如下:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} &= \boldsymbol{E}\cdot\left[-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)\right] \\
&= -\varepsilon_0E^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{E} + \frac{1}{2\mu_0}B^2\boldsymbol{E} = 0
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = 0 \quad , \quad \overleftrightarrow{\mathscr{T}}\cdot\boldsymbol{E} = \overleftrightarrow{\mathscr{T}}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \overleftrightarrow{\mathscr{T}}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}(\varepsilon_0E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) = \varpi\boldsymbol{k}$$

故此: 注意量纲

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \varpi\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = cg\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k$$

§ 3.13 例二求平面电磁波对理想导体的辐射压强。

【定义】 由电磁波具有动量，致使入射于物体上时会对其施加一定的压力，这种压力称为辐射压力。

【解】 入射电磁波切线分量动量不产生辐射压强；电磁波法向分量平均动量为:

$$\bar{g}c\cos\theta = \bar{\varpi}_i\cos\theta$$

每秒入射于导体表面单位面积的法向分量动量为（面积为$\frac{1}{\cos\theta}$）

$$\frac{\bar{g}c\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = \bar{\varpi}_i\cos^2\theta$$

由于电磁波被反射回去，故此导体表面所受辐射压强为:

$$P = 2\bar{\varpi}_i\cos^2\theta$$

在导体外部，总电场为入射波电场$\boldsymbol{E}_i$加反射波电场$\boldsymbol{E}_r$: 干涉项平均为零

例二（续）

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r \quad , \quad E^2 = E_i^2 + E_r^2 + 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_i^* \cdot \boldsymbol{E}_r)$$

当全反射时有：$\bar{\varpi} = \bar{\varpi}_i + \bar{\varpi}_r = 2\bar{\varpi}_i$

对完全吸收电磁波有：$E = E_i$，$\bar{\varpi} = \bar{\varpi}_i$结论同样成立

$$P = \bar{\varpi}\cos^2\theta$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{\varpi}\sin\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{\bar{\varpi}}{3}$$

【另解】 对于s偏振电磁波入射在导体表面：

光压，ICF

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_r + \boldsymbol{E}_i = 0 \quad , \quad \boldsymbol{B} = 2B_i\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{2}{\mu_0}B_i^2\cos^2\theta\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{\varpi}_i\cos^2\theta\boldsymbol{n}$$

$$P = 2\bar{\varpi}_i\cos^2\theta$$

§ 3.14 小结

★ 已知定域振荡源，即可求出其辐射场：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\,e^{ikr}}{r}\,\mathrm{d}V'$，其中$e^{ikr}$为推迟作用因子；

★ 依辐射场的三种特征长度(l, λ, r)可将空间划分为：近（静态）区，中间（感应）区，远（辐射）区；

★ 对小区域电流电荷分布作多极展开，可求其辐射区的电磁场；

★ 由于电荷守恒，故电单极势是静态的；

★ 辐射区电磁场$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$正比于r_0^{-1}，辐射区能流$\bar{\boldsymbol{S}}$正比于r_0^{-2}；

★ 辐射总功率P与r_0无关：符合能流通量守恒；

★ 电、磁偶极辐射能流$\bar{\boldsymbol{S}}$以及功率P正比于ω^4，电四极辐射正比于ω^6；

频率越高：甩得越快，做功越多

★ 电偶极辐射能流$\bar{\boldsymbol{S}}$以及功率P正比于$(\frac{l}{\lambda})^2$，磁偶极、电四极辐射正比于$(\frac{l}{\lambda})^4$；

★ 必须有$\ddot{\boldsymbol{p}} \neq 0$才会存在电偶极辐射；

★ 电磁波具有动量，会对照射物体产生辐射压力；

【习题】 Page 225：7,11

附：静电、静磁偶极产生的$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi^{(1)} = -\nabla(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{p}\times(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}) + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\boldsymbol{p}\times(\nabla\times\nabla\frac{1}{r}) + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)(\boldsymbol{r}_0\frac{1}{r_0^3})\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_0^3}(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_0\cdot(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\frac{1}{r_0^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}}{r_0^3} - 3\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r)\,\boldsymbol{e}_r}{r_0^3}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{m}}{r_0^3} - 3\frac{(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r)\,\boldsymbol{e}_r}{r_0^3}\right]
$$

附：证明

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{p}} = \iiint \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t)\,\mathrm{d}V'
$$

【证】

$$
\boldsymbol{p}(t) = \iiint \rho(\boldsymbol{x}', t)\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}V'
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint \rho(\boldsymbol{x}', t)\boldsymbol{x}'\,\mathrm{d}V' &= \iiint \left\{\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{x}'}{\partial t} + \nabla'\cdot[\rho(\boldsymbol{x}', t)\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}']\right\}\mathrm{d}V' \\
&= \iiint \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{x}' + \nabla'\cdot(\rho\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{x}' + (\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla')\boldsymbol{x}'\right\}\mathrm{d}V' \\
&= \iiint \left\{\boldsymbol{x}'\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla'\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right) + (\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla')\boldsymbol{x}'\right\}\mathrm{d}V' \\
&= \iiint \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V' = \iiint \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

19

第四节　　磁偶极辐射和电四极辐射

（略）

第五节　天线辐射

（略）

第六节　电磁波的衍射

（略）

第七节　电磁场的动量

参见第一章第六节。