

⑤ 34-39

# 光学非球面最佳参考圆的 确定及其应用

刘中本 孙桂林 汪平涛

(仪器工程系)

TH744

## 摘 要

应用干涉法测非球面,必须测量参考球面的曲率半径才能得到非球面的面形,因此需要精密的测长机构。本文介绍一种在一维测量时,用数学方法确定非球面最佳参考圆的参数,进而由干涉图求得非球面面形或面形误差的新方法,从而可省去测长机构。所提出的微扰动阻尼牛顿迭代法求非线性最小二乘解,经实践证明,有很好的迭代效果。

关 键 词 光学零件 误差 迭代法 最佳参考圆  
中图分类号 TH744

## 1 问题的提出

众所周知,非球面光学零件能大大改善光学系统的性能,但是,过去由于加工工艺和检测手段的限制,其发展十分缓慢。随着加工和检测技术的不断进步,微机技术、激光技术和视频技术的引入,大大地改善了非球面光学零件加工的效率 and 精度,同时也大大提高了检测的速度、精确性和自动化程度。在高精度干涉检测方法中,常测出非球面面形相对于参考球面的偏离量,然后测出参考球面的曲率半径,再算出非球面面形。为了求得参考球面的曲率半径,在测试仪器上必须配有精密的、量程足够的测长机构<sup>[1]</sup>,这不仅大大增加了检测仪器的体积,而且还大大提高了制造成本。我们采用的方法是用波面拟合的方法求得非球面面形相对于最佳参考球面的偏差,用数学的方法计算出该最佳参考球面的曲率半径 $R$ 和该参考球面顶点相对于非球面顶点的偏离量 $\Delta$ ,而后计算出非球面面形及面形误差。用这种方法可省去昂贵的测长机构。本文就此做一详细介绍。

## 2 数学模型

为简单起见, 设被测非球面为二次曲面, 其理论方程为

$$y^2 + z^2 = c_1 x + c_2 x^2 \quad (1)$$

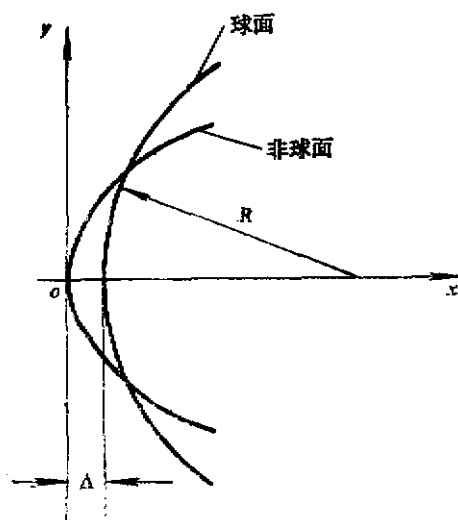
最佳参考球面方程是

$$y^2 + z^2 = R^2 - (x - \Delta - R)^2 \quad (2)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  为非球面的两个参数,  $R$  为最佳参考球的曲率半径,  $\Delta$  为最佳参考球面顶点的偏离量, 如附图所示。当最佳参考球曲率中心在  $x > 0$  的空间时,  $R$  为正, 否则  $R$  为负; 当最佳参考球面顶点位于非球面顶点之右时(在图示坐标系中),  $\Delta$  为正, 否则,  $\Delta$  为负。

引入符号函数

$$\text{sign}(R) = \begin{cases} 1 & R > 0 \\ -1 & R < 0 \end{cases} \quad (3)$$



附图 非球面与其最佳参考球面

则由(2)式解出

$$x = R + \Delta - \text{sign}(R) \sqrt{R^2 - \rho^2} \quad (4)$$

其中

$$\rho^2 = y^2 + z^2 \quad (5)$$

非球面  $x(\rho)$  与最佳参考球面的差为

$$w_1(\rho) = x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R) \sqrt{R^2 - \rho^2} \quad (6)$$

所谓的最佳参考球, 指的是满足下式的  $R$  和  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_{-D/2}^{D/2} W_1^2(\rho) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R) \sqrt{R^2 - \rho^2}]^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \min \end{aligned} \quad (7')$$

亦即非球面与球面之差平方和为最小。其中  $D$  为非球面口径。

在一维测量时, 最佳参考球退化为最佳参考圆, 其  $R$  和  $\Delta$  应满足

$$Q = \int_{-D/2}^{D/2} W_1^2(\rho) d\rho$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}]^2 d\rho \\
 &= \min
 \end{aligned} \tag{7}$$

根据最小二乘法原理,就上式分别对 $R$ 和 $\Delta$ 求偏导数,并令其为零,整理后可得到如下两个方程

$$\int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}] d\rho = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}] \\
 &\quad [R/\sqrt{R^2 - \rho^2} - 1] d\rho = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

由(8)式可解出

$$\Delta = \int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}] d\rho / D \tag{10}$$

而(9)式为非线性方程,无显式解。因此,必须借助于迭代法。下面我们介绍一种改进的牛顿迭代法。

### 3 微扰动阻尼牛顿迭代法

牛顿迭代法求根是一种基本方法,其原理是,令(9)式为函数 $f(R)$ ,即

$$\begin{aligned}
 f(R) &= \int_{-D/2}^{D/2} [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}] [R/\sqrt{R^2 - \rho^2} - 1] d\rho \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

对(11)式求导,得

$$\begin{aligned}
 f'(R) &= \int_{-D/2}^{D/2} \{ [R/\sqrt{R^2 - \rho^2} - 1]^2 - [x(\rho) - R - \Delta + \text{sign}(R)\sqrt{R^2 - \rho^2}] \\
 &\quad [\rho^2/(\sqrt{R^2 - \rho^2})^3] \} d\rho
 \end{aligned} \tag{12}$$

则第 $i+1$ 次迭代的根 $R_{i+1}$ 为

$$R_{i+1} = R_i - f(R_i)/f'(R_i) \tag{13}$$

其中 $R_i$ 为第 $i$ 次迭代值。利用(11), (12), (13)式反复迭代,直至满足

$$|R_{i+1} - R_i| \leq \varepsilon \tag{14}$$

其中 $\varepsilon$ 是预先给定的迭代精度。

在迭代过程中,牛顿法始终是从一个方向向根值逼近的,而且,在接近根值时,由于 $f(R)$ 非常小,因此迭代速度很慢。为解决此问题,我们采用了加大步长的方法,即将(13)

式修改为

$$(R_{i+1} = R_i - t \cdot f(R_i) / f'(R_i) \quad (15)$$

其中  $t$  是某个大于 1 的数。我们把上述方法叫做阻尼牛顿迭代法。

$t$  值的选择也是一个关键。 $t$  较小, 不可能显著提高迭代速度;  $t$  较大, 则会出现振荡, 即  $f'(R_i)$  正负交替变化。从数学上讲, 这是分别从两个方向向根值逼近的结果, 因此, 必须对  $t$  值加以限制。为了减少计算量, 我们采用微扰法, 即在两次振荡之间, 采用最靠近根值 ( $f(R_i)$  较小) 一端的 0.618 优选法。这样, 不仅可使优选出的  $R_{i+1}$  比 (15) 式算出的更接近根值, 而且避免了反复振荡, 同时, 不需再次计算 (11) 和 (12) 式。振荡消除后, 仍用 (15) 式计算。实践证明, 这种混和法应用于最佳参考圆参数的确定, 迭代效果较好。我们把该法叫做微扰动阻尼牛顿迭代法。

我们用 FORTRAN 语言编制了一个简短的程序, 计算了五个工程上使用的光学非球面, 平均迭代次数远小于牛顿法或 0.618 法。迭代时, 我们以图纸上提供的顶点曲率半径为迭代初始值。  $\varepsilon$  为  $10^{-8}$  mm。

#### 4 小相对孔径时的简化计算

对于一些相对孔径较小的二次非球面 ( $R \gg D$ ), 我们用另一种完全简化了的方法求解  $R$  和  $\Delta$ 。这种方法是, 这适当的近似下, 利用最小二乘法, 不经迭代, 直接求解。下面以二次抛物面为例 ( $c_2 = 0$ ), 作一详细推导。

由 (1) 式解出

$$x(\rho) = (y^2 + z^2) / c_1 = \rho^2 / 2p \quad (16)$$

其中,  $p$  为抛物面 2 倍焦距。将 (16) 式代入 (6) 式, 将  $\sqrt{R^2 - \rho^2}$  展成台劳级数, 并略去四次方以上的项, 有

$$\begin{aligned} w_1(\rho) &= \rho^2 / 2p - [R + \Delta - \text{sign}(R) \sqrt{R^2 - \rho^2}] \\ &\approx \rho^2 / 2p - [R + \Delta - R + \rho^2 / 2R + \rho^4 / 8R^3] \\ &= \rho^2 / 2p - \Delta - \rho^2 / 2R - \rho^4 / 8R^3 \end{aligned} \quad (17)$$

注意,  $R < 0$  时, 开方后为  $-R$ , 与  $\text{sign}(R)$  相乘, 结果为  $+R$ , 故式中  $\text{sign}(R)$  消失。设  $R = p + d$ , 且  $R \gg d$ , 对 (17) 式再作适当的近似, 有

$$w_1(\rho) = d \cdot \rho^2 / 2p^2 - \Delta - \rho^4 / 8p^3 \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (7) 式, 并对  $\Delta$  和  $d$  求偏导, 整理有

$$\int_{-D/2}^{D/2} [d \cdot \rho^2 / 2p^2 - \Delta - \rho^4 / 8p^3] d\rho = 0 \quad (19)$$

$$\int_{-D/2}^{D/2} [d \cdot \rho^2 / 2p^2 - \Delta - \rho^4 / 8p^3] \rho^2 / 2p^2 d\rho = 0 \quad (20)$$

对(19)、(20)式积分, 经整理有

$$d \cdot D^2/24p^2 - \Delta - D^4/640p^3 = 0 \quad (21)$$

$$d \cdot D^2/20p^2 - 2\Delta/3 - D^4/448p^3 = 0 \quad (22)$$

联立(21)、(22)式, 求解可得到

$$d = 3D^2/56p \quad (23)$$

$$\Delta = 3D^4/4480p^3 \quad (24)$$

所以, 对于抛物面, 有

$$w_1(\rho) = \rho^2/2p - \rho^2/2(p+d) - \rho^4/8(p+d)^3 - \Delta \quad (25)$$

上述推导过程中, 虽然作了一定的近似, 但实践表明, 这种近似是合理的, 满足了一些小相对孔径非球面的测试要求。

同理, 对于椭球面, 设  $a, b$  分别是其长短半轴, 则有

$$w_1(\rho) = \rho^2(b/2a^2 - 1/2R) + \rho^4(b/a^4 - 1/R^3)/8 - \Delta \quad (26)$$

其中  $R = a^2/b + d, d = 3(b^2 - a^2)D^2/56a^2b$

$$\Delta = 3b(b^2 - a^2)D^4/4480a^6$$

对于双曲面, 设  $2a, 2b$  分别是其实轴和虚轴, 则有

$$w_1(\rho) = \rho^2(b/2a^2 - 1/2R) - \rho^4(b/a^4 + 1/R^3)/8 + \Delta \quad (27)$$

其中  $R = a^2/b + d, d = 3(b^2 + a^2)D^2/56a^2b$

$$\Delta = 3b(b^2 + a^2)D^4/4480a^6$$

以上各式中,  $D$  为被测非球面口径,  $\rho$  为计算点坐标。  $\Delta$  与文献[2]差一负号。

上述简化计算已经用于测量实践中, 并获得了成功<sup>[2]</sup>。

二维测量时, 对(7')式进行类似的处理, 也可获得最佳参考球面的参数, 这里不再赘述。

## 5 结 论

以上介绍的用数学方法确定最佳参考圆参数和求解最佳参考圆参数的微扰动阻尼牛顿迭代法及小相对孔径时的简化计算方法, 理论上是正确的, 实践中也是有效的, 从而为缩小非球面面形干涉测试仪器体积, 降低仪器成本和提高测量速度做出了贡献。

## 参 考 文 献

- [1] Kanoh T, Automated interferometric system for aspheric surface testing, The Proceedings of SPIE, 1986, 680: 71

- [2] 刘中本等. 用条纹扫描剪切干涉仪测量非球面面形. 西安工业学院学报, 1991, 11(3): 9

## DETERMINATION AND APPLICATION OF THE BEST FITTING REFERENCE CIRCLE OF OPTICAL ASPHERICAL SURFACE

*Liu Zhongben   Sun Guilin   Wang Pingtao*

### Abstract

In order to get the surface error of an optical aspherical surface by using interference method, the curvature radius of the reference sphere must be precisely measured, therefore, a high precision apparatus of measuring the length has to be used. This paper introduces a new method that using pure mathematical method determines the parameters of the best fitting reference circle (one dimension measurement). Using this method, we can get the surface error of aspherical surface from the interference pattern.

**Key words:** optical parts   error   iteration method  
the best fitting reference circle

**作者简介:** 刘中本, 男, 1938年生, 教授。1962年毕业于清华大学精密系。先后两次以访问学者身份去日本研修。主要从事光学测试、红外技术、全息术等方面的教学和研究工作。

**通讯地址:** 710032 西安市金花北路七号  
西安工业学院仪器工程系